Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 9

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 33 Gegeben ist die $\mathbb{F}_4$-lineare Abbildung

$$f : \mathbb{F}_4^{4\times 1} \to \mathbb{F}_4^{2\times 1} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2+\alpha x_3 \\ x_2+x_3+\alpha x_4 \end{pmatrix}.$$

Sei B die Standardbasis und $B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{F}_4^{4\times 1}$.
Sei C die Standardbasis und $C' := \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{F}_4^{2\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_C f_B$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_{B'}$, ${}_{C'}\mathrm{id}_C$ und ${}_{C'} f_{B'}$.

(c) Bestimmen Sie Kern(f). Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

Lösung. Wir bezeichnen die gegebenen Basisvektoren wie folgt.

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad C = (c_1, c_2) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$B' = (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad C' = (c'_1, c'_2) = (\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

(a) Um die beschreibende Matrix von f bezüglich der Basen B und C zu bestimmen, bilden wir die Basisvektoren von B unter f ab und schreiben das Ergebnis als Linearkombination der Basisvektoren von C.

$$\begin{array}{rcccccl} f(b_1) & = & f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 \\ f(b_2) & = & f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & = & 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \\ f(b_3) & = & f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} & = & \alpha \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \\ f(b_4) & = & f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} & = & 0 \cdot c_1 + \alpha \cdot c_2 \end{array}$$

Damit erhalten wir ${}_C f_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(b) Wir bestimmen ${}_B\mathrm{id}_{B'}$ analog zu Teil (a).

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}(b_1') &= \mathrm{id}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} &= 1\cdot b_1 + 1\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 0\cdot b_4\\
\mathrm{id}(b_2') &= \mathrm{id}(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} &= 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 1\cdot b_3 + 1\cdot b_4\\
\mathrm{id}(b_3') &= \mathrm{id}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} &= 1\cdot b_1 + 1\cdot b_2 + 1\cdot b_3 + 0\cdot b_4\\
\mathrm{id}(b_4') &= \mathrm{id}(\begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\\1\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\\1\end{pmatrix} &= 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + \alpha\cdot b_3 + 1\cdot b_4
\end{aligned}$$

Da B die Standardbasis von $\mathbb{F}_4^{4\times 1}$ ist, sind also die Spalten von ${}_B\mathrm{id}_{B'}$ gerade die Basisvektoren von B'. Das Gleiche gilt für ${}_C\mathrm{id}_{C'}$, und wir erhalten

$${}_B\mathrm{id}_{B'} = \begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&\alpha\\0&1&0&1\end{pmatrix}, \qquad {}_C\mathrm{id}_{C'} = \begin{pmatrix}\alpha&1\\\alpha&0\end{pmatrix}.$$

Nun können wir ${}_{C'}\mathrm{id}_C$ als die inverse Matrix von ${}_C\mathrm{id}_{C'}$ berechnen.

$${}_{C'}\mathrm{id}_C = ({}_C\mathrm{id}_{C'})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}0&1\\\alpha&\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\alpha+1\\1&1\end{pmatrix}$$

Zusammen mit ${}_Cf_B$ aus Teil (a) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
{}_{C'}f_{B'} &= {}_{C'}\mathrm{id}_C\cdot {}_Cf_B\cdot {}_B\mathrm{id}_{B'}\\
&= \begin{pmatrix}0&\alpha+1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\alpha&0\\0&1&1&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&\alpha\\0&1&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0&\alpha+1&\alpha+1&1\\1&0&\alpha+1&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&\alpha\\0&1&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha+1&\alpha&0&0\\1&1&\alpha&\alpha\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben $A := {}_Cf_B = \begin{pmatrix}1&1&\alpha&0\\0&1&1&\alpha\end{pmatrix}$. Dann ist $f = \mathrm{mult}_A$ und damit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(A)$.

Wir rechnen

$$\begin{pmatrix}1&1&\alpha&0\\0&1&1&\alpha\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&\alpha+1&\alpha\\0&1&1&\alpha\end{pmatrix}$$

und erhalten die Basis $(\begin{pmatrix}\alpha+1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\0\\1\end{pmatrix})$ von $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(A)$.

Insbesondere ist $\mathrm{Kern}(f) \neq 0$. Also ist f nicht injektiv.

Es gilt

$$\dim(f(\mathbb{F}_4^{4\times 1})) = \dim(\mathbb{F}_4^{4\times 1}) - \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 4 - 2 = 2 = \dim(\mathbb{F}_4^{2\times 1}).$$

Also ist f surjektiv.

Hausaufgabe 34

Sei $s \in \mathbb{C}$ ein Parameter. Sei $A_s = \left(\begin{smallmatrix} 1&1&s&s \\ 0&1&1&s \\ 0&0&1&1 \\ s&0&0&1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

(a) Berechnen Sie $\det(A_s)$ und $\det(s^2 A_s)$.

(b) Für welche Werte von $s \in \mathbb{C}$ ist $s^2 A_s$ invertierbar?

(c) Bestimmen Sie $B := A_s^{\mathrm{t}} \cdot A_s$ und $\det(B)$.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$\begin{aligned}
\det(A_s) &= \det\left(\begin{smallmatrix} 1&1&s&s \\ 0&1&1&s \\ 0&0&1&1 \\ s&0&0&1 \end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1&1&s&s \\ 0&1&1&s \\ 0&0&1&1 \\ 0&-s&-s^2&1-s^2 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} 1&1&s \\ 0&1&1 \\ -s&-s^2&1-s^2 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{smallmatrix} 1&1&s \\ 0&1&1 \\ 0&s-s^2&1 \end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1&1&s \\ 0&1&1 \\ 0&0&s^2-s+1 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot 1 \cdot (s^2 - s + 1) \\
&= s^2 - s + 1
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\det(s^2 A_s) = (s^2)^4 \cdot \det(A_s) = s^8(s^2 - s + 1).$$

(b) Es ist $s^2 A_s$ genau dann invertierbar, wenn

$$\begin{aligned}
0 &\neq \det(s^2 A_s) \\
&= s^8(s^2 - s + 1) \\
&= s^8(s^2 - s + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}) \\
&= s^8((s - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}) \\
&= s^8(s - \tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}))(s - \tfrac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}))
\end{aligned}$$

gilt. Also ist $s^2 A_s$ für $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\}$ invertierbar.

(c) Es ist

$$B = A_s^{\mathrm{t}} \cdot A_s = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&s \\ 1&1&0&0 \\ s&1&1&0 \\ s&s&1&1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1&1&s&s \\ 0&1&1&s \\ 0&0&1&1 \\ s&0&0&1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} s^2+1 & 1 & s & 2s \\ 1 & 2 & s+1 & 2s \\ s & s+1 & s^2+2 & s^2+s+1 \\ 2s & 2s & s^2+s+1 & 2(s^2+1) \end{smallmatrix}\right).$$

Unter Verwendung von Teil (a) erhalten wir

$$\det(B) = \det(A_s^{\mathrm{t}} \cdot A_s) = \det(A_s^{\mathrm{t}}) \cdot \det(A_s) = \det(A_s) \cdot \det(A_s) = (s^2 - s + 1)^2.$$

Hausaufgabe 35 Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$.

(b) Es ist i ein Eigenwert von A. Bestimmen Sie seinen Eigenraum, seine algebraische Vielfachheit und seine geometrische Vielfachheit.

(c) Sei $B := (X, 1, X^2, X^3 + 1)$ eine Basis von $\mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$.

Sei $\varphi : \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$ die lineare Abbildung mit ${}_B\varphi_B = A$.

Bestimmen Sie ein $f(X) \in \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \smallsetminus \{0\}$, für das $\varphi\big(f(X)\big) = \mathrm{i}f(X)$ ist.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_4) && = \det \begin{pmatrix} -2-X & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -X & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2-X \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -X & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -X & -1 \\ -X & 0 & 1 & 2-X \end{pmatrix} && = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & X \\ 0 & -X & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -X & -1 \\ -X & 0 & 1 & 2-X \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & X & 0 & 0 \\ -X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -X \\ 0 & 2-X & -X & 1 \end{pmatrix} && = -\det \begin{pmatrix} 1 & X \\ -X & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -X \\ -X & 1 \end{pmatrix} \\
&= (X^2+1)^2
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\chi_A(X) \;=\; (X^2+1)^2 \;=\; ((X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i}))^2 \;=\; (X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2 .$$

Also besitzt der Eigenwert i die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(\mathrm{i}) = 2$.

Es ist $\mathrm{E}_A(\mathrm{i}) \;=\; \mathrm{Kern}(A - \mathrm{i}\mathrm{E}_4)$. Wir rechnen.

$$\begin{aligned}
A - \mathrm{i}\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -2-\mathrm{i} & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -\mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(\mathrm{i}) \;=\; \mathrm{Kern}(A - \mathrm{i}\mathrm{E}_4)$.

Also besitzt der Eigenwert i die geometrische Vielfachheit $\mathrm{gV}_A(\mathrm{i}) = \dim(\mathrm{E}_A(\mathrm{i})) = 1$

(c) Für $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ ist

$$\varphi\big(f(X)\big) = \mathrm{i}f(X) \iff {}_B\varphi\big(f(X)\big) = \mathrm{i}\,{}_Bf(X) \iff {}_B\varphi_B \cdot {}_Bf(X) = \mathrm{i}\,{}_Bf(X)\,.$$

Gilt also $\varphi\big(f(X)\big) \;=\; \mathrm{i}f(X)$ für ein Polynom $f(X) \in \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \smallsetminus \{0\}$, so ist ${}_Bf(X)$ ein Eigenvektor von $A \;=\; {}_B\varphi_B$ zum Eigenwert i.

Nach Teil (b) können wir ${}_Bf(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ wählen und erhalten

$$f(X) \;=\; 1 \cdot X + 0 \cdot 1 + \mathrm{i} \cdot X^2 + 1 \cdot (X^3+1) \;=\; X^3 + \mathrm{i}X^2 + X + 1$$

in $\mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \smallsetminus \{0\}$ mit $\varphi\big(f(X)\big) = \mathrm{i}f(X)$.

Hausaufgabe 36 Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis seines Eigenraums, seine algebraische Vielfachheit und seine geometrische Vielfachheit.

Lösung.

(a) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_6) \\
&= \det \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-X & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-X & -\frac{5}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -X \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -X & 0 \\ 1 & -X \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & -\frac{5}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -X \end{pmatrix} \\
&= X^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & -\frac{5}{4} \\ 1 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -X \end{pmatrix} \\
&= -X^3 \cdot \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 1 \\ X & 1-X & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= X^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= X^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= X^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2-X & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= X^4((2-X)(1-X) + \tfrac{1}{4}) \\
&= X^4(X^2 - 3X + \tfrac{9}{4}) \\
&= X^4(X - \tfrac{3}{2})^2
\end{aligned}$$

Also sind 0 und $\frac{3}{2}$ die Eigenwerte von A.

(b) Nach Teil (a) besitzt der **Eigenwert 0** die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(0) = 4$.

Es ist $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Kern}(A - 0 \cdot \mathrm{E}_6) = \mathrm{Kern}(A)$. Wir rechnen.

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&-\frac{5}{4}&0 \\ 1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1&0 \\ 0&1&1&1&-\frac{5}{4}&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&-\frac{9}{4}&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Kern}(A)$.

Also besitzt der Eigenwert 0 die geometrische Vielfachheit $\mathrm{gV}_A(0) = \dim(\mathrm{E}_A(0)) = 3$.

Nach Teil (a) besitzt der **Eigenwert 3/2** die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(\frac{3}{2}) = 2$.

Es ist $\mathrm{E}_A(\frac{3}{2}) = \mathrm{Kern}(A - \frac{3}{2} \cdot \mathrm{E}_6)$. Wir rechnen.

$$A - \frac{3}{2} \cdot \mathrm{E}_6 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(\frac{3}{2}) = \mathrm{Kern}(A - \frac{3}{2} \cdot \mathrm{E}_6)$.

Also besitzt der Eigenwert $\frac{3}{2}$ die geometrische Vielfachheit $\mathrm{gV}_A(\frac{3}{2}) = \dim(\mathrm{E}_A(\frac{3}{2})) = 1$.