Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 10

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \\ -7 & 2 & -4 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $D := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix von A ist. Geben Sie D an.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$
\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(A - X\cdot \mathrm{E}_4) &= \det\begin{pmatrix} 3-X & -2 & 0 & -2 \\ 5 & 1-X & 5 & 0 \\ -7 & 2 & -4-X & 2 \\ -5 & 0 & -5 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 3-X & -2 & 0 & -2 \\ 5 & 1-X & 5 & 0 \\ -4-X & 0 & -4-X & 0 \\ 0 & 1-X & 0 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (-4-X)(1-X)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-X & -2 & 0 & -2 \\ 5 & 1-X & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-4-X)(1-X)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-4-X)(1-X)(3-X)(1-X) = (X-1)^2(X+4)(X-3)
\end{aligned}
$$

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = 3$.

(b) *Eigenwert* $\lambda_1 = 1$. Wir bestimmen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Kern}(A - 1\cdot\mathrm{E}_4)$.

$$
A - 1\cdot \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ -7 & 2 & -5 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Damit ist also $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(1)$.

Eigenwert $\lambda_2 = -4$. Wir bestimmen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(-4) = \mathrm{Kern}(A + 4 \cdot \mathrm{E}_4)$.

$$A + 4 \cdot \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 & 5 \\ 7 & -2 & 0 & -2 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -9 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist also $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right))$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(-4)$.

Eigenwert $\lambda_3 = 3$. Wir bestimmen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(3) = \mathrm{Kern}(A - 3 \cdot \mathrm{E}_4)$.

$$A - 3 \cdot \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \\ -7 & 2 & -7 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -7 & 2 & -7 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist also $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right))$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(3)$.

Wir setzen als S die Matrix, welche die Basisvektoren der Eigenräume als Spalten besitzt.

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als zugehörige Diagonalmatrix D erhalten wir die folgende Matrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen, in der Reihenfolge der Basiselemente in der Matrix S.

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 38 Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $\chi_A(X) = -(X-3)^3$ gegeben.
Sei $B := \left(\begin{smallmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 6 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $\chi_B(X) = -(X-4)^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie zum einzigen Eigenwert von A je eine Basis des Eigen- und des Hauptraums. Bestimmen Sie eine Jordanbasis und eine Jordansche Normalform von A.

(b) Bestimmen Sie zum einzigen Eigenwert von B je eine Basis des Eigen- und des Hauptraums. Bestimmen Sie eine Jordanbasis und eine Jordansche Normalform von B.

Lösung.

(a) Aus dem charakteristischen Polynom lesen wir den einzigen Eigenwert $\lambda_1 := 3$ von A ab. Wir bestimmen eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

$$A_{(1)} = A - 3 \cdot \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(3) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Mit $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist die Zeilenstufenform von $A_{(1)} \cdot A_{(1)}$ dieselbe wie die von $A' \cdot A_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{E}_A(3)$ mit dem Vektor, der zu der neu hinzugekommenen Nichtstufenspalte gehört. Dies ergibt die folgende ergänzte Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

$$\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}\Bigg)$$

Wegen $\dim(\mathrm{H}_A(3)) = \mathrm{aV}_A(3) = 3$ ist nun $\mathrm{H}_A(3) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Dabei haben wir den Vektoren Bezeichnungen gegeben, die im vorderen Index andeuten, in welchem Schritt wir sie hinzugefügt haben. Es bleibt, eine Jordanbasis von A zu bestimmen. Alle Basisvektoren, die wir im letzten Schritt hinzugefügt haben, sind Teil einer Hauptvektorkette und damit Teil einer Jordanbasis. Hier war dies nur ein Basisvektor, und für diesen setzen wir $y_{2,1} := x_{2,1}$.

Wir berechnen $A_{(1)} y_{2,1} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, um die Kette fortzusetzen.

Nun müssen wir das Tupel $(A_{(1)} y_{2,1})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ ergänzen. Wegen $A_{(1)} y_{2,1} = -2 \cdot x_{1,2}$ können wir dazu nur $x_{1,1}$ auswählen. Dies ergibt die Basis $(A_{(1)} y_{2,1},\ x_{1,1})$ von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$. Alle Basisvektoren, die wir in diesem Schritt hinzugenommen haben, sind Teil einer neuen Hauptvektorkette. Hier war dies nur der Vektor $x_{1,1}$, und für diesen setzen wir $y_{1,1} := x_{1,1}$.

Zusammen erhalten wir die Hauptvektorketten $(A_{(1)}y_{2,1}, y_{2,1})$ und $(y_{1,1})$. Die gesuchte Jordanbasis besteht nun aus allen während der Konstruktion erhaltenen Hauptvektorketten. Dabei treffen wir eine Wahl, in welcher Reihenfolge verschiedene Hauptvektorketten auftreten. Innerhalb einer Hauptvektorkette ist die Reihenfolge vorgegeben.

Für jede dieser Hauptvektorketten besitzt eine Jordansche Normalform J von A einen Jordanblock zum zugehörigen Eigenwert. Die Länge der Hauptvektorkette gibt dabei die Größe des Jordanblocks an. Die Reihenfolge der Blöcke ist durch die gewählte Reihenfolge der Hauptvektorketten in der Jordanbasis vorgegeben.

$$\text{Jordanbasis}: \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Aus dem charakteristischen Polynom lesen wir den einzigen Eigenwert $\lambda_1 := 4$ von B ab. Wir bestimmen eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

$$B_{(1)} = B - 4 \cdot \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_B(4) = \mathrm{Kern}(B_{(1)})$.

Mit $B' := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist die Zeilenstufenform von $B_{(1)} \cdot B_{(1)}$ dieselbe wie die von $B' \cdot B_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -4 & -4 & 8 \end{smallmatrix}\right)$, nämlich $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -2 \end{smallmatrix}\right) =: B''$. Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{E}_B(4)$ mit dem Vektor, der zu der neu hinzugekommenen Nichtstufenspalte gehört. Dies ergibt die Basis $\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ von $\mathrm{Kern}(B_{(1)}^2)$.

Es hat $B_{(1)}^3$ dieselbe Zeilenstufenform wie $B'' \cdot B_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(B_{(1)}^2)$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(B_{(1)}^3)$ mit dem Vektor, der zur neu hinzugekommenen Nichtstufenspalte gehört.

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{3,1}}\right)$$

Wegen $\dim(\mathrm{H}_B(4)) = \mathrm{aV}_B(4) = 3$ ist nun $\mathrm{H}_B(4) = \mathrm{Kern}(B_{(1)}^3)$.

Dabei haben wir den Vektoren Bezeichnungen gegeben, die im vorderen Index andeuten, in welchem Schritt wir sie hinzugefügt haben. Es bleibt, eine Jordanbasis von B zu bestimmen. Alle Basisvektoren, die wir im letzten Schritt hinzugefügt haben, sind Teil einer Hauptvektorkette und damit Teil einer Jordanbasis. Hier war dies nur ein Basisvektor, und für diesen setzen wir $y_{3,1} := x_{3,1}$.

Wir berechnen $B_{(1)}y_{3,1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B_{(1)}^2 y_{3,1} = \left(\begin{smallmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ um die Kette fortzusetzen.

Nun müssen wir das Tupel $(x_{1,1},\ B_{(1)}y_{3,1})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A^2_{(1)})$ ergänzen. Da das Tupel bereits aus $2 = \dim(\mathrm{Kern}(B^2_{(1)}))$ Vektoren besteht, ist dies in diesem Fall nicht nötig. Ebenso ist $(B^2_{(1)}y_{3,1})$ bereits eine Basis von $\mathrm{E}_B(4)$.

Zusammen erhalten wir eine einzige Hauptvektorkette $(B^2_{(1)}y_{3,1},\ B_{(1)}y_{3,1},\ y_{3,1})$. Analog zu oben ergibt dies die folgende Jordanbasis und Jordansche Normalform J von B.

$$\text{Jordanbasis} : (\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \qquad J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 39 Gegeben ist die von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} t & 2t-4 & t+1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mit charakteristischem Polynom $\chi_{A_t}(X) = -(X-t)(X-5)(X+1)$.

(a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A_t in Abhängigkeit von t.
Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$, für welches A_t invertierbar, aber nicht diagonalisierbar ist.
Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$, für welches A_t diagonalisierbar, aber nicht invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform J von A_5.
Bestimmen Sie damit J^n und $\mathrm{tr}(A_5^n)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Lösung.

(a) Wir lesen die Eigenwerte $\lambda_1 := 5$ und $\lambda_2 := -1$ aus dem charakteristischen Polynom von A_t ab. Falls $t \notin \{5, -1\}$, so besitzt A_t drei verschiedene Eigenwerte und ist somit diagonalisierbar. Wir müssen also nur noch die Fälle $t = 5$ und $t = -1$ untersuchen.

Fall $t = 5$. In diesem Fall ist $\mathrm{aV}_{A_5}(5) = 2$. Wir bestimmen $\mathrm{gV}_{A_5}(5)$.

$$A_5 - 5 \cdot \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $\mathrm{E}_{A_5}(5) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Also ist $\mathrm{gV}_{A_5}(5) = 1 < 2 = \mathrm{aV}_{A_5}(5)$. Damit ist A_5 nicht diagonalisierbar.

Fall $t = -1$. In diesem Fall ist $\mathrm{aV}_{A_{-1}}(-1) = 2$. Wir bestimmen $\mathrm{gV}_{A_{-1}}(-1)$.

$$A_{-1} + \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $\mathrm{E}_{A_{-1}}(-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Also ist $\mathrm{gV}_{A_{-1}}(-1) = 1 < 2 = \mathrm{aV}_{A_{-1}}(-1)$ und damit A_{-1} nicht diagonalisierbar.

Insgesamt ist

$$\{\, t \in \mathbb{R} \,:\, A_t \text{ ist diagonalisierbar} \,\} \;=\; \mathbb{R} \setminus \{-1,\, 5\}\,.$$

(b) Verwendung der Blockdreiecksgestalt gibt $\det(A_t) = t(4-9) = -5t$. Dies entspricht dem konstanten Term von $\chi_{A_t}(X)$. Es ist nun A_t genau dann invertierbar, wenn $\det(A_t) = -5t \neq 0$, also wenn $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

Aus (a) haben wir: Es ist A_t diagonalisierbar für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\, 5\}$, sonst nicht.

Damit ist A_t z.B. für $t = -1$ invertierbar, aber nicht diagonalisierbar.

Dagegen ist A_t für $t = 0$ diagonalisierbar, aber nicht invertierbar.

(c) Aus Teil (a) wissen wir, dass A_5 die Eigenwerte $\lambda_1 := 5$ und $\lambda_2 := -1$ besitzt und nicht diagonalisierbar ist. Also muss A_5 mindestens zwei Jordanblöcke besitzen. Weiterhin muss einer der Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$ mindestens die Größe zwei haben, da A_5

nicht diagonalisierbar ist. Damit bleibt, bis auf die Reihenfolge der Blöcke, nur noch die folgende Jordansche Normalform für A_5 möglich.

$$J := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen mit dem speziellen Induktionsprinzip: Es ist

$$J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & n \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. In der Tat ist $\begin{pmatrix} (-1)^0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^0 & 0 \cdot 5^{-1} \\ 0 & 0 & 5^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J^0$. Sei $n \geqslant 1$. Wir schließen von $n-1$ nach n. Dazu können wir als Induktionsvoraussetzung benutzen, dass bereits $J^{n-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{n-1} & (n-1) \cdot 5^{n-2} \\ 0 & 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix}$ ist. Wir rechnen wie folgt.

$$J^n = J^{n-1} \cdot J = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{n-1} & (n-1) \cdot 5^{n-2} \\ 0 & 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & n \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

Es bleibt die Spur $\operatorname{tr}(A_5^n)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ zu bestimmen. Da J eine Jordansche Normalform von A_5 ist, gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ so, dass $J = S^{-1} \cdot A_5 \cdot S$ gilt. Für die n-te Potenz folgt nun

$$J^n = (S^{-1} \cdot A_5 \cdot S) \cdot (S^{-1} \cdot A_5 \cdot S) \cdot \cdots \cdot (S^{-1} \cdot A_5 \cdot S) = S^{-1} \cdot A_5 \cdot \cdots \cdot A_5 \cdot S = S^{-1} \cdot A_5^n \cdot S,$$

da $S^{-1} \cdot S = \mathrm{E}_3$. Nach der Bemerkung am Ende von Abschnitt 3.7.1 im Skript ist damit $\operatorname{tr}(A_5^n) = \operatorname{tr}(J^n) = (-1)^n + 2 \cdot 5^n$.

Hausaufgabe 40 Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und den Eigenwert λ_1 von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)})$. Ergänzen Sie für $i \geqslant 2$ die gefundene Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)}^{i-1})$ zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)}^{i})$, sofern $\operatorname{Kern}(A_{(1)}^{i-1}) \subset \mathrm{H}_A(\lambda_1)$.

Bestimmen Sie so eine Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(\lambda_1)$ von A zum Eigenwert λ_1 .

Lösung.

(a) Wir rechnen in $\mathbb{F}_5[X]$.

$$
\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(A - X\cdot \mathrm{E}_6) &= \det\begin{pmatrix} -X & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-X & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2-X & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X \end{pmatrix} \\
&= -X \cdot \det\begin{pmatrix} -X & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2-X & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2-X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= -X \cdot \det\begin{pmatrix} -X & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2-X & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2-X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X & -X \end{pmatrix} \\
&= -X^2 \cdot \det\begin{pmatrix} -X & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2-X & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2-X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -X^2 \cdot \det\begin{pmatrix} -X & -2X & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -X & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2-X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= X^3 \cdot \det\begin{pmatrix} -X & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2-X & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{pmatrix} \\
&= X^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2-X & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2-X & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{pmatrix} \\
&= -X^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2-X & 2 & -2 \\ 1 & -2-X & -1 \\ 0 & 1 & -X \end{pmatrix} \\
&= -X^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2-X & 2 & -X \\ 1 & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{pmatrix} \\
&= -X^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 2-X & 2 & -1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -X^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 2-X & 1 & -1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= X^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & -2-X \end{pmatrix} \\
&= X^4(X^2 - 4 - 1) = X^6
\end{aligned}
$$

Damit hat A den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit $\mathrm{aV}_A(0) = 6$.

(b) Wir bestimmen eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

$$A_{(1)} = A - 0 \cdot \mathrm{E}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Mit $A' := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ist die Zeilenstufenform von $A_{(1)} \cdot A_{(1)}$ dieselbe wie die von $A' \cdot A_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Um eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ zu finden, bringen wir also zuerst diese Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ mit den beiden Vektoren, die zu den neu hinzugekommenen Nichtstufenspalten gehören. Dies ergibt die folgende Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Wir setzen $A'' := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Zeilenstufenform von $A_{(1)}^3$ ist dieselbe wie die von $A'' \cdot A_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ mit dem Vektor, der zu der neu hinzugekommenen Nichtstufenspalte gehört. Dies ergibt die folgende Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$.

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Wegen $\dim(\mathrm{H}_A(0)) = \mathrm{aV}_A(0) = 6$ ist nun $\mathrm{H}_A(0) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$.