Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 11

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 41

Wie in Hausaufgabe 40 sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$ mit $\chi_A(X) = X^6 \in \mathbb{F}_5[X]$.

Eine mögliche schrittweise ergänzte Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(0)$ ist gegeben durch

$$(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}) \;=\; \left(\begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an. Vergleichen Sie zur Probe $A \cdot S$ und $S \cdot J$.

(b) Sei $B := A + 2\mathrm{E}_6 \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$.

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$ so, dass $J' := T^{-1} \cdot B \cdot T$ eine Jordansche Normalform von B ist. Geben Sie J' an.

Lösung.

(a) Es hat A einen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit $\mathrm{aV}_A(0) = 6$. Insbesondere ist $A_{(1)} = A$.

Wir bestimmen eine Basis von $\mathrm{H}_A(0) = \mathbb{F}_5^{6\times 1}$ aus Hauptvektorketten.

Dazu setzen wir $y_{3,1} := x_{3,1}$. Es ist

$$A_{(1)} y_{3,1} \;=\; A_{(1)} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \;=\; x_{2,1} - x_{1,1}$$

$$A_{(1)}^2 y_{3,1} \;=\; A_{(1)} \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \;=\; x_{1,1} + x_{1,2}$$

Es ist $(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, A_{(1)} y_{3,1}, x_{2,2})$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Wir setzen demgemäß $y_{2,1} := x_{2,2} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$A_{(1)} y_{2,1} \;=\; A_{(1)} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\-1\\-1\\0 \end{pmatrix} \;=\; x_{1,1} - x_{1,2}$$

Es ist $(A_{(1)}^2 y_{3,1}, A_{(1)} y_{2,1}, x_{1,3})$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}) = \mathrm{E}_A(0)$.

Wir setzen demgemäß $y_{1,1} := x_{1,3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit erhalten wir jeweils eine Hauptvektorkette der Längen 3, 2 und 1.

$$\begin{aligned} &(A_{(1)}^2 y_{3,1}\,, A_{(1)} y_{3,1}\,, y_{3,1}) \\ &(A_{(1)} y_{2,1}\,, y_{2,1}) \\ &(y_{1,1}) \end{aligned}$$

Also ist

$$S := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$$

eine invertierbare Matrix mit

$$J \;=\; S^{-1} \cdot A \cdot S \;=\; \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$S^{-1}BS \;=\; S^{-1}(A + 2\mathrm{E}_6)S \;=\; S^{-1}AS + 2\mathrm{E}_6 \;=\; J + 2\mathrm{E}_6 \;=\; \begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0 \\ 0&2&1&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&2&1&0 \\ 0&0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

eine Jordansche Normalform von B.

Also ist $T := S \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$ eine invertierbare Matrix mit $J' \;=\; T^{-1}BT \;=\; J + 2\mathrm{E}_6$.

Hausaufgabe 42 Es ist

$$A := \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha+1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{5\times 5}$$

mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) \;=\; (X+\alpha)^5$ gegeben.
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{F}_4^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Lösung. Es hat A einen Eigenwert $\lambda_1 := \alpha$ mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(\alpha) = 5$.
Es wird

$$A_{(1)} \;=\; A + \alpha\mathrm{E}_5 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha+1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $(\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha+1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha+1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,3}})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(\alpha) \;=\; \mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Es wird

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha+1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha+1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

$$(\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{x_{1,1}},\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha+1\\\alpha+1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{x_{1,2}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\\alpha\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{x_{1,3}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=:\,x_{2,1}},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=:\,x_{2,2}})$$

Wegen $\dim_{\mathbb{F}_4}(\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)) = 5 = \mathrm{aV}_A(\alpha)$ gilt $\mathrm{H}_A(\alpha) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2) = \mathbb{F}_4^{5\times 1}$.
Gesucht ist eine Basis von $\mathbb{F}_4^{5\times 1}$ aus Hauptvektorketten von A.
Dazu setzen wir $y_{2,1} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $y_{2,2} := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Es wird

$$\begin{aligned} A_{(1)}y_{2,1} &= A_{(1)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\\alpha\\0\end{pmatrix} = \alpha x_{1,2} \\ A_{(1)}y_{2,2} &= A_{(1)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+1\\\alpha\\0\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} = \alpha x_{1,2} + \alpha x_{1,3}\,. \end{aligned}$$

Es ist $(A_{(1)}y_{2,1}\,, A_{(1)}y_{2,2}, x_{1,1})$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}) = \mathrm{E}_A(\alpha)$.
Wir setzen demgemäß $y_{1,1} := x_{1,1} = \begin{pmatrix}\alpha+1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.
Damit erhalten wir zwei Hauptvektorketten der Länge 2 und eine der Länge 1.

$$\begin{aligned}&(A_{(1)}y_{2,1}\,, y_{2,1})\\ &(A_{(1)}y_{2,2}\,, y_{2,2})\\ &(y_{1,1})\end{aligned}$$

Also ist

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{5\times 5}$$

eine invertierbare Matrix mit

$$S^{-1}\cdot A\cdot S = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} =: J$$

in Jordanscher Normalform.

Hausaufgabe 43 Sei

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{7\times 7}\,.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{7\times 7}$ so, dass $J := S^{-1}\cdot A\cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A.
Es ist

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(X) & = & \det(A - X\mathrm{E}_7) \\ & = & \det\begin{pmatrix} -2-X & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -X & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-X & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\ & = & \det\begin{pmatrix} -2-X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} 1-X \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} 1-X \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\ & = & (X^2+2X+1)\cdot(1-X)^5 \\ & = & -(X+1)^2(X-1)^5\,. \end{array}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Dabei ist $\mathrm{aV}_A(-1) = 2$ und $\mathrm{aV}_A(1) = 5$.

> Die Vektorenbezeichnungen $x_{i,j}$ und $y_{i,j}$ werden lokal bei jedem Eigenwert verwendet, um zu verhindern, daß wir noch einen Index anzufügen haben.

Zu $\lambda_1 = -1$. Es wird

$$A_{(1)} = A + \mathrm{E}_7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\,x_{1,1}}\Big)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Es wird

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)})$ zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)}^2) \;=\; \mathrm{H}_A(-1)$.

$$(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=:\,x_{2,1}})$$

Gesucht ist eine Basis von $\mathrm{H}_A(-1)$ aus Hauptvektorketten.

Dazu setzen wir $y_{2,1} := x_{2,1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Es ist

$$A_{(1)}y_{2,1} \;=\; A_{(1)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \;=\; -x_{1,1}$$

Damit erhalten wir zu $\lambda_1 = -1$ eine Hauptvektorkette der Länge 2.

$$(A_{(1)}y_{2,1}\,, y_{2,1}) \;=\; (\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix})$$

Zu $\lambda_2 = 1$. Es wird

$$A_{(2)} \;=\; A - \mathrm{E}_7 \;=\; \begin{pmatrix}-3&1&2&0&-2&0&0\\-1&-1&2&2&-1&-2&2\\0&0&0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-3&1&2&0&-2&0&0\\-1&-1&2&2&-1&0&2\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-3&1&2&0&0&0&0\\-1&-1&2&2&0&0&2\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}-3&1&2&0&0&0&0\\-1&-1&2&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&-2&0&0&0&0\\0&4&-4&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Also ist $(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=:\,x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=:\,x_{1,2}})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(1) \;=\; \operatorname{Kern}(A_{(2)})$.

Es wird

$$A_{(2)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&2&0&-2&0&0\\-1&-1&2&2&-1&-2&2\\0&0&0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-3&1&2&-1&-2&1&-1\\-1&-1&2&1&-1&-1&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-3&1&2&-1&0&1&-1\\-1&-1&2&1&0&-1&1\\0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&-2&-1&0&1&-1\\0&4&-4&-4&0&4&-4\\0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&0&0&0&0\\0&1&-1&-1&0&1&-1\\0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(2)})$ zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(2)}^2)$.

$$(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=:\,x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{=:\,x_{2,2}})$$

Es wird

$$
\begin{aligned}
A_{(2)}^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^3) \;=\; \mathrm{H}_A(1)$.

$$
(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\, x_{3,1}})
$$

Gesucht ist eine Basis von $\mathrm{H}_A(1)$ aus Hauptvektorketten.

Dazu setzen wir $y_{3,1} := x_{3,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$
\begin{aligned}
A_{(2)} y_{3,1} \quad &= \quad A_{(2)} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad x_{2,1} + x_{1,2} \\
A_{(2)}^2 y_{3,1} \quad &= \quad A_{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad x_{1,1}\,.
\end{aligned}
$$

Es ist $(x_{1,1}, x_{1,2}, A_{(2)} y_{3,1}, x_{2,2})$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$.

Wir setzen demgemäß $y_{2,1} := x_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$
A_{(2)} y_{2,1} \;=\; A_{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; -x_{1,1} - x_{1,2}\,.
$$

Es ist bereits $(A_{(2)}^2 y_{3,1}, A_{(2)} y_{2,1})$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}) = \mathrm{E}_A(1)$. Ergänzende Vektoren sind nicht nötig.

Damit erhalten wir zu $\lambda_2 = 1$ eine Hauptvektorkette der Länge 3 und eine der Länge 2.

$$
\begin{aligned}
(A_{(2)}^2 y_{3,1}\,, A_{(2)} y_{3,1}\,, y_{3,1}) \quad &= \quad (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \\
(A_{(2)} y_{2,1}\,, y_{2,1}) \quad &= \quad (\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})
\end{aligned}
$$

Insgesamt ist also

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{7\times 7}$$

eine invertierbare Matrix mit

$$J \;=\; S^{-1} \cdot A \cdot S \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 44

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums ${}_{\mathbb{R}}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums ${}_{\mathbb{C}}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{C}^{4\times 1}$.

Lösung.

(a) Sei $V := {}_{\mathbb{R}}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$. Sei $c_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es wird $d'_1 = c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_1 = \frac{1}{||d'_1||} d'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d'_2 = c_2 - (d_1^{\mathrm{t}} \cdot c_2) d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2 = \frac{1}{||d'_2||} d'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es wird

$$
\begin{aligned}
d'_3 &= c_3 - (d_1^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_1 - (d_2^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_2 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Es wird $d_3 = \frac{1}{||d'_3||} d'_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten die Orthonormalbasis $(d_1, d_2, d_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$ von V.

(b) Sei $W := {}_{\mathbb{C}}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{C}^{4\times 1}$. Sei $c_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Es wird $d'_1 = c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_1 = \frac{1}{||d'_1||} d'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d'_2 = c_2 - (\bar{d}_1^{\mathrm{t}} \cdot c_2) d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2 = \frac{1}{||d_2'||} d_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\begin{aligned}
d_3' &= c_3 - (\bar{d}_1^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_1 - (\bar{d}_2^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_2 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} - \frac{1+\mathrm{i}}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} \\ -2+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es wird $d_3 = \frac{1}{||d_3'||} d_3' = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Wir erhalten die Orthonormalbasis

$$(d_1, d_2, d_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix})$$

von W.