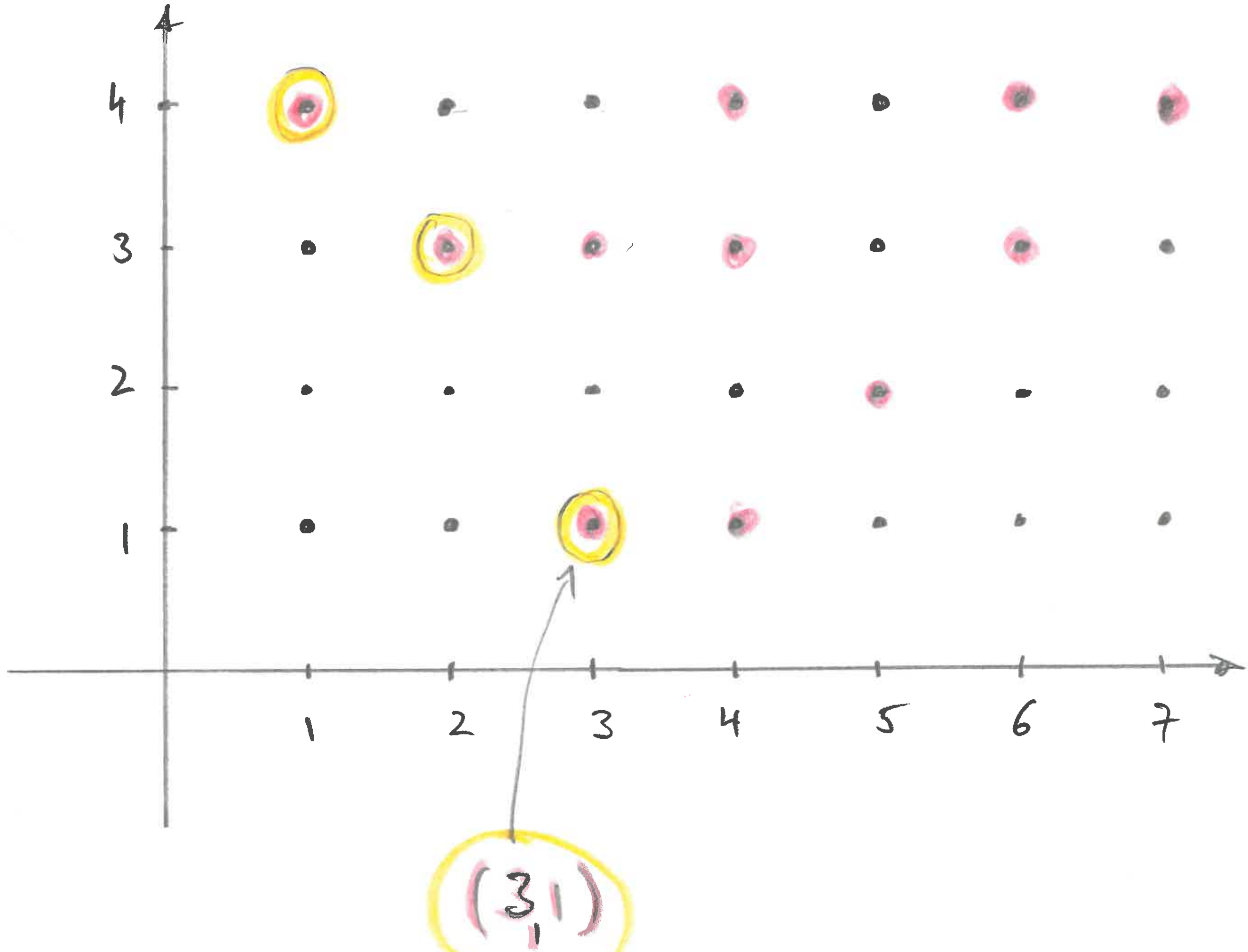
10.11.2020

Bsp

Wir betrachten folgende Teilmenge

$X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.



Die minimalen Elemente von X sind orange markiert.

Bsp

Wir beobachten:

$$3^0 = 1 = \frac{3-1}{2}$$

$$3^0 + 3^1 = 4 = \frac{3^2-1}{2}$$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 = 13 = \frac{3^3-1}{2}$$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40 = \frac{3^4-1}{2}$$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121 = \frac{3^5-1}{2}$$

$$\vdots$$

Ist

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2} \qquad (*_n)$$

für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$?

Dies wollen wir mittels Induktion nachweisen, mit dem speziellen Induktionsprinzip.

<u>Induktionsanfang</u> :

Für $n = 0$ ist

$$3^0 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{3^1 - 1}{2} = 1$$

Das ist dasselbe, wie in $(*_0)$ behauptet.

<u>Induktionsschritt</u> :

Wir müssen die Gleichung $(*_n)$ bei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ zeigen.

Wir dürfen die Gleichung $(*_{n-1})$ dafür verwenden. Wir dürfen also die <u>Induktionsvoraussetzung</u>

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^{(n-1)+1} - 1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

verwenden.

Damit wird

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n$$

$$= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} + 3^n$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^n - 1 + 2 \cdot 3^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 \cdot 3^n - 1\right)$$

$$= \frac{3^{n+1} - 1}{2},$$ wie zu zeigen war.

In Kürze werden wir dies auch so schreiben:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{n} 3^k \underset{\uparrow}{=} \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

neue Schreibweise

hier mit Induktion gezeigt

(Man muß das nicht unbedingt mit Induktion zeigen, man kann auch folgenden Trick anwenden:

Sei $x := 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n$.

Dann ist

$$3x = 3 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n)$$

$$= 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n+1}$$

$$= -3^0 + x + 3^{n+1}.$$

Also $2x = 3^{n+1} - 1$.

Also $x = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.)