Bsp

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$$

$$\underset{\text{Kurzschreibweise}}{=} \{0, 1, 2, 3\}$$

Bsp:

$3 \equiv_4 -1$

$\Leftrightarrow [3]_4 = [-1]_4$

$\Leftrightarrow$ kurz $3 = -1$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Tafeln für $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

(+)	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(·)	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Bsp:

In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist

$[3]_4 \cdot [3]_4 = [9]_4$

$= [1]_4$,

kurz:

$3 \cdot 3 = 9$

$= 1$

keine Eins enthalten, also:

$\neg \exists x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : 2 \cdot x = 1$

Es hat 2 kein multiplikativ Inverses

Bsp

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{ [0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5 \}$$

$$\overset{\text{kurz}}{=} \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

Multiplikationstafel:

$(\cdot)$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

In den Zeilen zu 1, 2, 3 und 4 taucht jeweils eine 1 auf:

Jedes Element von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ ist multiplikativ invertierbar,

$1^{-1} = 1, \quad 2^{-1} = 3, \quad 3^{-1} = 2, \quad 4^{-1} = 4$

<u>Bsp</u> Es ist $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \cdot)$ ein abelsches Monoid.

Da in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ aber

$$2 \cdot 2 = 0$$ ist

(ausführlich: $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$),

läßt sich $(\cdot)$ nicht auf $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ einschränken.

<u>Bsp</u> Es ist $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \cdot)$ ein abelsches Monoid.

Es läßt sich $(\cdot)$ auf $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ einschränken, und es wird $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{0\}, \cdot)$ ...

... eine abelsche Gruppe:

$(\cdot)$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$

$= \{[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$

$\overset{\text{kurz}}{=} \{1, 2, 3, 4\}$

Neutrales Element: 1

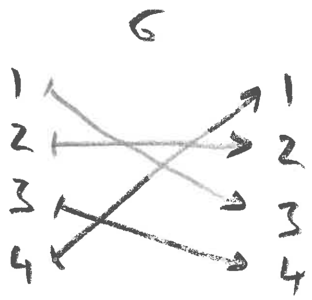
Inverses Element, jeweils:

$1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$, $4^{-1} = 4$

Bsp Die symmetrische Gruppe S_4 besteht aus den bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$$

z.B. ist



in S_4,

geschrieben $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Es ist $|S_4| = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

da: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \underset{\text{4 Möglichkeiten}}{\rho(1)} & \underset{\text{3 Möglichkeiten}}{\rho(2)} & \underset{\text{2 Möglichkeiten}}{\rho(3)} & \underset{\text{1 Möglichkeit}}{\rho(4)} \end{pmatrix}$

z.B. wird

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$