Bsp Wir rechnen im Körper

$$\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

$$[2]_5 \cdot [2]_5 = [4]_5 = [-1]_5,$$

kurz: $2 \cdot 2 = 4 = -1$

$$2 \cdot 3 = 6 = 1$$

Also: $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$.

Somit $\frac{7}{13} = \frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot 2$

$= 4$.

Bsp Wir rechnen im Körper

$$\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

$$2 \cdot 4 = 8 = 1$$

Also $2^{-1} = 4$, $4^{-1} = 2$

$$3 \cdot 5 = 15 = 1$$

Also $3^{-1} = 5$, $5^{-1} = 3$

Somit:

$$-\frac{12}{31} = \frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1}$$

$$= 2 \cdot 5$$

$$= 10$$

$$= 3$$

Bsp

(1) Für $x, y \in \mathbb{F}_3$ wird

$$(x+y)^3 \overset{\text{Bin.}}{=} \underset{\text{LS}}{} x^3 + \underbrace{3x^2y}_{=0} + \underbrace{3xy^2}_{=0} + y^3$$

$$= x^3 + y^3$$

(2) Für $x, y \in \mathbb{F}_5$ wird

$$(x+y)^5 \overset{\text{Bin.}}{=} \underset{\text{LS}}{} x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$= x^5 + y^5$$

(3) Das geht allgemein.

Denn für p prim und $1 \le k \le p-1$

ist

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!},$$

($p!$: teilbar durch p; $k!$ und $(p-k)!$: nicht teilbar durch p)

und also $\binom{p}{k} \equiv_p 0$.

Für $x, y \in \mathbb{F}_p$ wird also

$$(x+y)^p$$

$$= x^p + \left(\sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{p}{k}}_{=0} x^{p-k} y^k \right) + y^p$$

$$= x^p + y^p \quad \text{in } \mathbb{F}_p$$

Bsp für $K = \mathbb{F}_5$.

$f(X) := X^4$ hat die polynomiale Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_5 & \longrightarrow & \mathbb{F}_5 \\ x & \longmapsto & f(x) = x^4 \end{array}$$

Werte:

				-2	-1
				$\shortparallel$	$\shortparallel$
x	0	1	2	3	4
x^4	0^4	1^4	2^4	$(-2)^4$	$(-1)^4$
	$\shortparallel$	$\shortparallel$	$\shortparallel$	$\shortparallel$	$\shortparallel$
	0	1	16	16	1
			$\shortparallel$	$\shortparallel$	
			1	1	

Also: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$

Bsp Sei $K = \mathbb{F}_5$.

$g(X) := X^5$ hat die polynomiale Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_5 & \longrightarrow & \mathbb{F}_5 \\ x & \longmapsto & g(x) = x^5 \end{array}$$

Weiter

x	0	1	2	3	4	
x^4	0	1	1	1	1	(s. oben)
x^5	0	1	2	3	4	

Also ist zwar $\boxed{X^5 \neq X}$ in $\mathbb{F}_5[X]$,

aber $\boxed{x^5 = x}$ für $x \in \mathbb{F}_5$