<u>Bsp</u> Wir betrachten einmal das Polynom $(2X-5)(X-3) =: f(X)$.

Dieses hat natürlich die rationalen Nullstellen $\frac{5}{2}$ und $3 = \frac{3}{1}$.

Wir wollen einmal überprüfen, ob unsere Teilbarkeitsregeln in diesem Fall auch zutreffen. Es ist

$$f(X) = (2X-5)(X-3)$$
$$= 2X^2 - 11X + 15$$

Für $\frac{u}{v} = \frac{5}{2}$ ist tatsächlich $5 \mid 15$ und $2 \mid 2$

Für $\frac{u}{v} = \frac{3}{1}$ ist tatsächlich $3 \mid 15$ und $1 \mid 2$

Das bestätigt unsere Regeln.

Bsp. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},$$

Dabei ist $a_{2,1} = 8$, $a_{1,2} = -3$, usf.

Es ist

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Es wird

$$A \cdot B = \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^{3\times 2}} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^{2\times 3}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 13 & 5 & 18 \\ 10 & 7 & 17 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^{3\times 3}}$$

$$a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{2,1} = 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 13$$

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 0 - 3\cdot 2} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Probe (alternativ): $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

<u>Bsp</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{2\times 2}$

$$A^{-1} = \frac{1}{2\cdot 1 - 1\cdot(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{4^{-1}=2}{=} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$