Bsp Lösen (in $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_5 &\overset{!}{=} 5\\
-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &\overset{!}{=} 4\\
-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\overset{!}{=} 6\\
x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &\overset{!}{=} 4
\end{aligned}$$

Umschreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ \in \mathbb{R}^{4\times 5}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{\substack{x \\ \in \mathbb{R}^{5\times 1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\substack{b \\ \in \mathbb{R}^{4\times 1}}}$$

Wir führen den Algorithmus zur Bestimmung der Zeilenstufenform durch:

14.12.20 - 2

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\multicolumn{5}{c|}{A} & b \\
1 & 6 & 5 & 0 & 5 & 5 \\
-1 & -3 & 1 & 1 & -1 & 4 \\
-1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 6 \\
\boxed{1} & 4 & 1 & 1 & 4 & 4
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 4 \\
0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\
0 & \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 8 \\
0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 10
\end{array}\right)
\begin{array}{c} -4 \\ -2 \\ \\ -2 \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -7 & -7 & -8 & -28 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\
0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -6
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -7 & -7 & -8 & -28 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\
0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{c} 7 \\ -2 \\ 5 \\ \\ \end{array}
$$

in Zeilenstufenform

$$
\rightsquigarrow
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -7 & 0 & -1 & -7 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
= & = & = & = & = \\
\ell_1 & \ell_2 & \ell'_1 & \ell_3 & \ell'_2
\end{array}
\end{array}
$$

wäre hier der Eintrag $\neq 0$, dann wäre $Ax=b$ unlösbar

Zugehöriges **homogenes** lineares Gleichungssystem:

$$\{x \in \mathbb{R}^{5\times 1} : Ax = 0\}$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \qquad \begin{matrix} 1 = \ell_1 \\ 2 = \ell_2 \\ 3 = \ell_1' \\ 4 = \ell_3 \\ 5 = \ell_2' \end{matrix}$$

$$x_1 \qquad x_2$$

Ursprüngliches lineares Gleichungssystem, welches wegen $b \neq 0$ inhomogen war:

$$\{x \in \mathbb{R}^{5\times 1} : Ax = b\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ \boxed{0} \\ 3 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}}_{x_0} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}}_{x_2} \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \{ x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -7 + \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 1 \\ 2 + \lambda_1 \cdot (-2) + \lambda_2 \cdot (-1) \\ 0 + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 \\ 3 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot (-1) \\ 0 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(Dh. "allgemeine Lösung":

$x_1 = -7 + \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 1$

$x_2 = 2 + \lambda_1 (-2) + \lambda_2 \cdot (-1)$

$x_3 = 0 + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0$

$x_4 = 3 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot (-1)$

$x_5 = 0 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1$,

wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$)

Bsp (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform ist nicht E_2

$\Rightarrow$ A ist nicht invertierbar

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \ldots$$

$$\ldots \rightsquigarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{Zeilenstufenform} \\ \underline{\text{ist}}\ E_3}} \left| \begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = E_3$

(oder $A^{-1} \cdot A = E_3$)