Bsp Das Tupel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von Vektoren in $\mathbb{R}^{3\times 1}$

ist linear abhängig. Denn z.B.

$$\underbrace{(-1)}_{\lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{1}_{\lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{(-1)}_{\lambda_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obwohl nicht alle verwendeten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gleich 0 sind.

Es gibt also eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus unseren Vektoren.

<u>Bsp</u> Das Tupel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{3\times 1}$$

ist nicht erzeugend: Denn z. B.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \\ \\ +1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

unlösbar

Also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Also ist ${}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Bsp Wir wollen nochmal das Tupel $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ daraufhin untersuchen, ob es linear unabhängig oder erzeugend ist.

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Zeilenstufenform}} =: \tilde{A}$$

(1) Es enthält $\tilde{A}$ eine Nichtstufenspalte
$\Rightarrow$ Tupel linear abhängig

(2) Es enthält $\tilde{A}$ eine Nullzeile
$\Rightarrow$ Tupel nicht erzeugend in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Bsp

(1) Unterräume in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$: Ursprung
- Geraden durch Ursprung
- ganz $\mathbb{R}^{2\times 1}$

(2) Unterräume in $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$: Ursprung
- Geraden durch Ursprung
- Ebenen durch Ursprung
- ganz $\mathbb{R}^{3\times 1}$

Bsp $g := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$

ist eine Gerade durch den Ursprung: ...

$$\ldots \quad g = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

hat Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

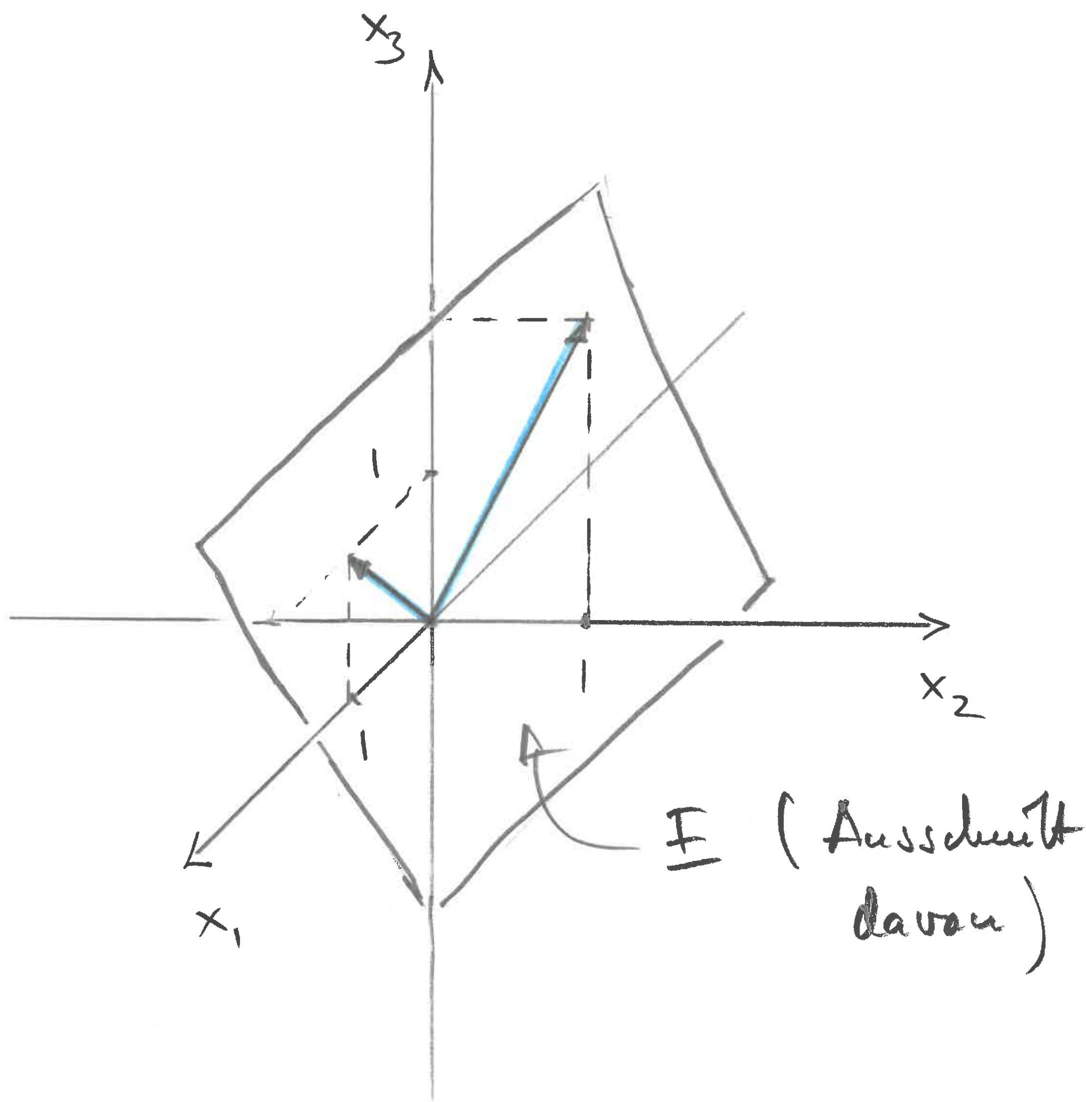
Bsp

$$E := \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{linear unabhängig}} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$$

ist eine Ebene durch den Ursprung;

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$



$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ ist erzeugend in $\underline{E}$ (nach Konstruktion) und linear unabhängig

$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis von $\underline{E}$

$\Rightarrow \quad \dim(E) = 2$

21.12.2017

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$

A ist bereits in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nichtstufenspalten

Es wird der Unterraum

$$\{ x \in \mathbb{R}^{3\times 1} : Ax = 0 \}$$

$$= \Big\langle \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}}_{x_2}}_{} \Big\rangle$$

und diese bilden eine Basis dieses Unterraums