<u>Bsp</u> (1) $T := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{F}_5^{3\times 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis von T

(2) $\mathcal{U} := \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{F}_5^{3\times 1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis von $\mathcal{U}$

(3) $$T+U = \Big\langle \underbrace{\overset{①}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{②}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{von } T}, \underbrace{\overset{③}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{④}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\text{von } U} \Big\rangle$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \Big(\underset{①}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{②}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{④}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \Big)$$ ist Basis von $T+U$.

Ferner: Basisvektoren von $\{ x \in \mathbb{F}_5^{4\times 1} : Ax = 0 \}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Basis von $T \cap U$ besteht nur aus einem Vektor, nämlich:

$$(-1)\cdot\overset{\textcircled{1}}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} + (-2)\cdot\overset{\textcircled{2}}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

$$= -\left(1\cdot\overset{\textcircled{3}}{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}} + 0\cdot\overset{\textcircled{4}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Zur Probe berechnet man den grünen und den blauen Ausdruck.

Ergebnis:

$T \cap U$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Bsp: Für welche $s \in \mathbb{R}$ stehen $\begin{pmatrix} s \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} s \\ s \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ aufeinander senkrecht?

Es ist

$$\begin{pmatrix} s \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} s \\ s \\ 1 \end{pmatrix} = s^2 + s - 2$$

$$= \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2$$

$$= \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Wann ist das gleich 0?

$$\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \left(s + \frac{1}{2}\right) \in \left\{-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow s \in \{-2, +1\}$$