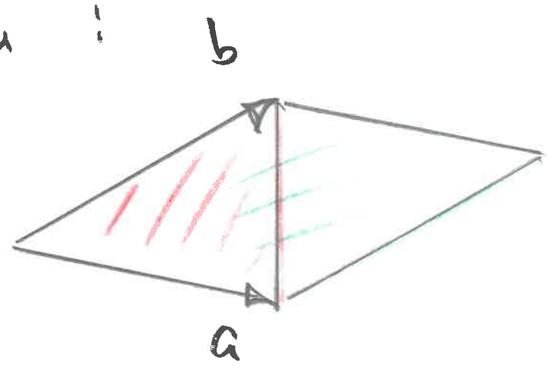
Bsp: Seien

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir wollen den Flächeninhalt A des von a und b aufgespannten Dreiecks berechnen:



Es ist $2 \cdot A$ der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

Wir berechnen also:

$$2\Delta = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 2\cdot 5 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 - 3\cdot 5 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{9^2 + (-15)^2 + 3^2}$$

$$= 3\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}$$

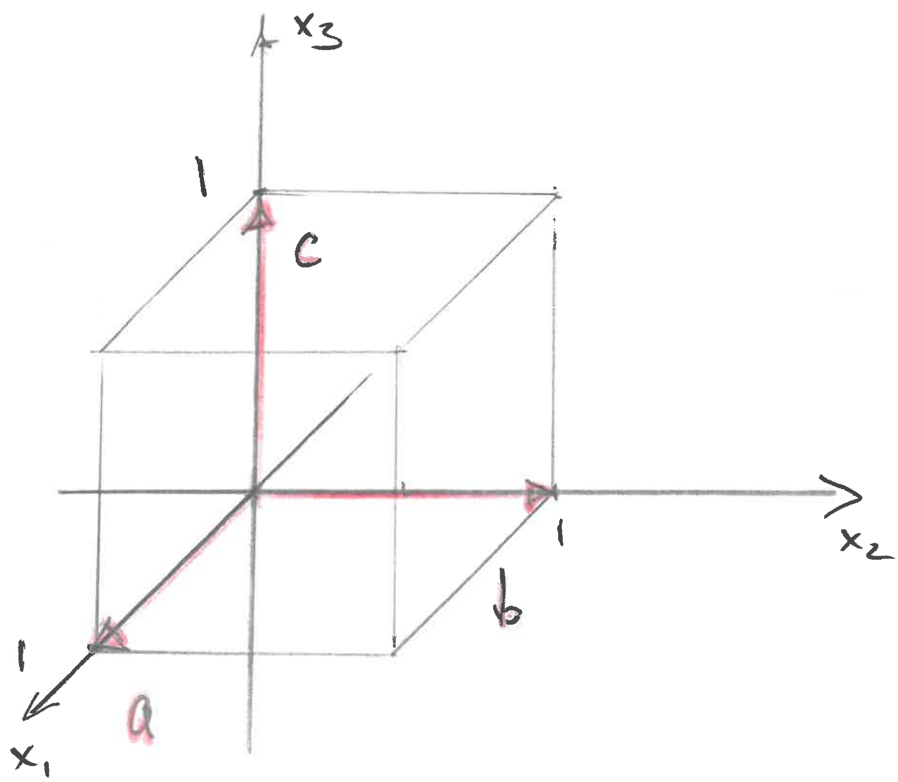
$$= 3\sqrt{35}$$

Somit hat unser Dreieck den Flächeninhalt $A = \frac{3}{2}\sqrt{35}$.

Bsp Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das von a, b, c aufgespannte Parallelepiped ist ein Würfel mit Kantenlänge 1:



Es hat also Volumen $V = 1$.

Prüfen wir an diesem Beispiel unsere Volumenformel:

$$V = \left| a^t (b \times c) \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 1$$

Das bestätigt unsere Erwartung.

Bsp

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Wir haben die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_A : \mathbb{R}^{3\times 1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 1} \\ x &\longmapsto A\cdot x \end{aligned}$$

Es ist also

$$\mathrm{mult}_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

Bsp Wir zeigen die Linearität der Abbildung

$$\varphi : K[X] \longrightarrow K[X]$$
$$f(X) \longmapsto \underbrace{X \cdot f(2) + f(X^2)}_{= \varphi(f(X))}$$

Zu zeigen ist:

$$\varphi(\lambda \cdot f(X) + \tilde{\lambda} \cdot \tilde{f}(X)) \overset{!}{=} \lambda \cdot \varphi(f(X)) + \tilde{\lambda} \cdot \varphi(\tilde{f}(X))$$

Es wird zum einen:

$$\varphi(\lambda \cdot f(x) + \tilde{\lambda} \cdot \tilde{f}(X))$$
$$= X \cdot \left(\lambda f(2) + \tilde{\lambda} \tilde{f}(2) \right)$$
$$+ \left(\lambda f(X^2) + \tilde{\lambda} f(X^2) \right)$$

Es wird zum anderen

$$\lambda \cdot \varphi(f(x)) + \tilde{\lambda}\, \varphi(\tilde{f}(x))$$

$$= \lambda \cdot \left(x \cdot f(2) + f(x^2) \right)$$
$$+ \tilde{\lambda} \cdot \left(x \cdot \tilde{f}(2) + \tilde{f}(x^2) \right)$$

$$= x \left(\lambda \cdot f(2) + \tilde{\lambda} \cdot \tilde{f}(2) \right)$$
$$+ \left(\lambda \cdot f(x^2) + \tilde{\lambda}\, \tilde{f}(x^2) \right)$$

Das ist dasselbe.

Bsp: $\quad c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \underbrace{\bar{z}}_{c(z)}$

erfüllt $\quad c(\lambda z + \lambda' z')$

$$= \overline{\lambda z + \lambda' z'} = \bar{\lambda}\, \bar{z} + \bar{\lambda}'\, \bar{z}'$$

$$\overset{\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}}{=} \lambda\, \bar{z} + \lambda'\, \bar{z}' = \lambda\, c(z) + \lambda'\, c(z')$$

für $z, z' \in \mathbb{C}$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.

Also ist c $\mathbb{R}$-linear.

Aber $c(i \cdot i + 0 \cdot 0) = -1$

$$\neq$$

$i \cdot c(i) + 0 \cdot c(0) = 1$

Also ist c <u>nicht</u> $\mathbb{C}$-linear.

<u>Bsp</u> $\varphi : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4 : x \longmapsto \underbrace{x^2}_{\varphi(x)}$

ist $\mathbb{F}_2$-linear:

$$\varphi(\lambda x + \tilde{\lambda}\tilde{x}) = (\lambda x + \tilde{\lambda}\tilde{x})^2$$

$$= \underbrace{\lambda^2}_{=\lambda} x^2 + \underbrace{2}_{=0} \lambda x \tilde{\lambda} \tilde{x} + \underbrace{\tilde{\lambda}^2}_{=\tilde{\lambda}} \tilde{x}^2$$

$$= \lambda x^2 + \tilde{\lambda} \tilde{x}^2$$

$$= \lambda \varphi(x) + \tilde{\lambda} \varphi(\tilde{x})$$

für $x, \tilde{x} \in \mathbb{F}_4$, $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{F}_2$

Beweis

Zu (2). Zum einen ist

$0 \in f^{-1}(V')$, da $f(0) \in V'$,

zum anderen ist für $u, \tilde{u} \in f^{-1}(V')$ und $\lambda, \tilde{\lambda} \in K$ auch

$$\lambda u + \tilde{\lambda} \tilde{u} \in f^{-1}(V'),$$

da

$$f(\lambda u + \tilde{\lambda} \tilde{u}) \overset{f\ K\text{-linear}}{=} \lambda \underbrace{f(u)}_{\in V'} + \tilde{\lambda} \underbrace{f(\tilde{u})}_{\in V'} \underset{K\text{-Unterraum}}{\overset{V' \subseteq V}{\in}} V'$$

<u>Bsp</u> für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\overset{m}{2} \times \overset{n}{3}}$$

Dann ist

$$\mathrm{mult}_A : \mathbb{R}^{\overset{n}{3} \times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\overset{m}{2} \times 1}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

(1) Wir berechnen

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(\mathrm{mult}_A)$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} : \mathrm{mult}_A(x) = 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} : A \cdot x = 0 \}$$

Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \ell_1 & \ell_2 & & \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^{3\times 1} : Ax = 0 \}$$

$$= {}_{\mathbb{R}}\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{bildet Basis}} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \dim\big(\mathrm{Kern}(A)\big) = 1$$

(2) $$\mathrm{mult}_A(\mathbb{R}^{3\times 1}) = {}_{\mathbb{R}}\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

$$= {}_{\mathbb{R}}\langle \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{bilden Basis}} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Rang}(A) = \dim\big(\mathrm{mult}_A(\mathbb{R}^{3\times 1})\big) = 2$$

Mit (1) und (2) wird:

$$n = 3 = \dim(\mathbb{R}^{3\times 1})$$

$$= \dim(\mathrm{Kern}(A)) + \mathrm{Rang}(A)$$

$$= 1 + 2$$