<u>Bsp</u> Sei $K = \mathbb{F}_3$,

sei $V = \mathbb{F}_3^{2\times 1}$.

Es ist $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

eine Basis von $\mathbb{F}_3^{2\times 1}$.

Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad {}_{\mathcal{B}}u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist der Koordinatenvektor von u bezüglich $\mathcal{B}$.

Bsp Wir betrachten die $\mathbb{F}_3$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_3^{3\times 1} &\xrightarrow{f} \mathbb{F}_3^{2\times 1} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} -x+y \\ y-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei $B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_3^{3\times 1}$.

Sei $C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_3^{2\times 1}$.

Es gilt

$${}_C f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = {}_C\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C standard

$${}_C f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = {}_C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}_C f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = {}_C\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$${}_C f_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $B' := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$

eine weitere Basis von $\mathbb{F}_3^{3\times 1}$.

Sei $C' := \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right)$

eine weitere Basis von $\mathbb{F}_3^{2\times 1}$.

Dann:

B standard

$${}_B \mathrm{id}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C standard

$${}_C \mathrm{id}_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
{}_{C'}\mathrm{id}_{C} = \left({}_{C}\mathrm{id}_{C'}\right)^{-1}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 0 - 1\cdot 1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Wir erhalten die beschreibende Matrix von f bezüglich C' und B' wie folgt.

$$
{}_{C'}f_{B'} = {}_{C'}\mathrm{id}_{C} \cdot {}_{C}f_{B} \cdot {}_{B}\mathrm{id}_{B'}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

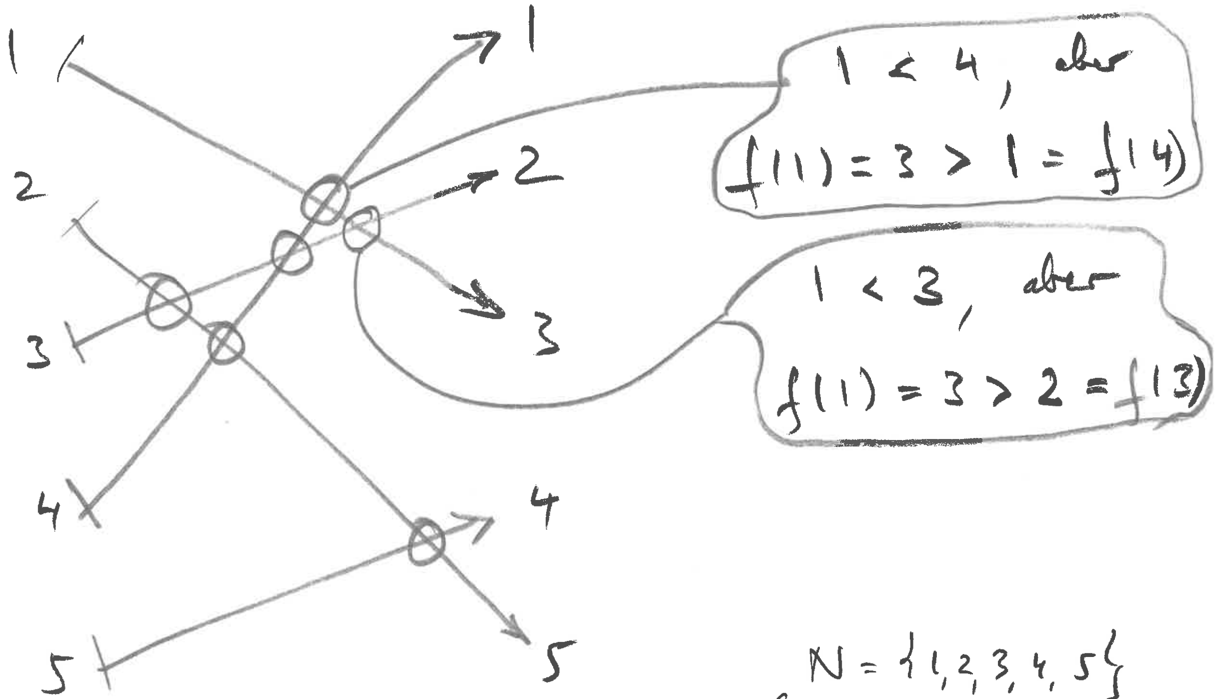
$$
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

(12.01.21 - 5

<u>Bsp</u> Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$

Es bildet σ wie folgt ab:



$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\text{fehl}(\sigma) = |\{(i,j) \in N \times N : i < j, \text{ aber } f(i) > f(j)\}|$$

= (Anzahl der Kreuzungspunkte "$\otimes$") = 6

$$\Rightarrow \quad \text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{fehl}(\sigma)} = (-1)^6 = +1$$

ist das Signum von σ.