Bsp

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 3}$.

(1) Ihr charakteristisches Polynom ist

$$\chi_A(X) = \det(A - X E_3)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0-X & 1 & -1 \\ 1 & 0-X & -1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$+1 \qquad +1$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1-X & 0 & -1 \\ 0 & -1-X & -1 \\ 2-X & 2-X & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= (X+1)^2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \quad -1 \quad -1$$

$$= (X+1)^2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -X \end{pmatrix}$$

$$= -(X+1)^2 \cdot X \in \mathbb{F}_3[X]$$

Also haben wir die

Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 0$

als Nullstellen von $\chi_A(X) \in \mathbb{F}_3[X]$

in $\mathbb{F}_3$ bestimmt.

(2) (a) Wir berechnen den

Eigenraum $E_A(-1) = \mathrm{Kern}(A-(-1)E_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-(-1) & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0-(-1) & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungsraum = Eigenraum zum Eigenwert -1:

$$E_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Eigenvektoren zum Eigenwert -1:

z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemein sind alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert -1 gegeben durch die Elemente von $E_A(-1) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

sie sind also von der Form

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b \\ a \\ b \end{pmatrix},$$

wobei $(a,b) \in \mathbb{F}_3^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Probe:

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A ...

... zum Eigenwert -1.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert -1

(b) Wir berechnen den Eigenraum $E_A(0) = \mathrm{Kern}(A - 0 E_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0-0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ ...

$$\ldots \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_A(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) Die Spur von A ist

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0+0+1 = 1$$

Und tatsächlich hat

$$\chi_A(X) = -(X+1)^2 X$$
$$= -X^3 - 2X^2 - X$$
$$= -X^3 + X^2 - X$$

den Koeffizienten $(-1)^{3-1} \cdot 1 = 1$

bei $X^{3-1} = X^2$.

(4) $\chi_A(X) = -(X+1)^2 X$

$= -(X-(-1))^2 \cdot (X-0)^1$

$\Rightarrow$ Algebraische Vielfachheiten

$aV_A(-1) = 2$

$aV_A(0) = 1$

$E_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$E_A(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ Geometrische Vielfachheiten

$gV_A(-1) = \dim E_A(-1) = 2$

$gV_A(0) = \dim E_A(0) = 1$

Tatsächlich:

$$1 \leq \underbrace{gV_A(-1)}_{=2} \leq \underbrace{aV_A(-1)}_{=2} \leq \underbrace{n}_{=3}$$

$$1 \leq \underbrace{gV_A(0)}_{=1} \leq \underbrace{aV_A(0)}_{=1} \leq \underbrace{n}_{=3}$$

$\star$

Für dieses A stehen hier zwei Gleichheiten