Bsp

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ (solche Blöcke werden später wieder auftauchen; Beispiel ist noch recht speziell)

$\chi_A(X) = (X-2)^4$

$\Rightarrow$ Eigenwert $\lambda_1 = 2$
mit algebraischer Vielfachheit
$aV_A(2) = 4$

① $A_{(1)} = A - \lambda_1 E_4$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Davon berechnen wir den Kern!

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}\left(A_{(1)}\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\shortparallel$$

$E_A(2)$ Eigenraum

2\.

$$A_{(1)}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Davon berechnen wir den Kern:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}\left(A_{(1)}^2\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}} \right\rangle$$

3.

$$A_{(1)}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Davon berechnen wir den Kern:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(A_{(1)}^3) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}} \right\rangle$$

Also:

$$E_A(\lambda_1) = \operatorname{Kern}(A_{(1)}) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\cap\!\!|$$

$$\operatorname{Kern}(A_{(1)}^2) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\cap\!\!|$$

$$\operatorname{Kern}(A_{(1)}^3) = \underbrace{\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}} \right\rangle}_{\text{Dimension } 4 = aV_A(2) \text{ erreicht}}$$

Somit ist bereits

$$\mathrm{Kern}\,(A_{(1)}^3) = H_A(2)$$

der Hauptraum von A zum

Eigenwert 2.

<u>Damit nochmal:</u>

$$\begin{aligned} E_A(\lambda_1) &= \mathrm{Kern}\,(A_{(1)}^1) \\ &\subseteq \mathrm{Kern}\,(A_{(1)}^2) \\ &\subseteq \mathrm{Kern}\,(A_{(1)}^3) = H_A(\lambda_1) \end{aligned}$$

Eigenraum, von Dimension

$gV_A(\lambda_1) = 2$

Hauptraum, von Dimension

$aV_A(\lambda_1) = 4$

(2) Es ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$

nicht diagonalisierbar:

es ist beim Eigenwert

$\lambda_1 = 2$

$gV_A(2) = 2 < 4 = aV_A(2)$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

Es ist $\chi_A(X) = -(X-1)(X-2)(X+1)$.

Wir haben die Eigenwerte

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

Da $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ gerade

3 verschiedene Eigenwerte

hat, ist A diagonalisierbar.

Wir wollen eine Diagonalisierung von A durchführen.

Zu $\lambda_1 = 1$:

$$A_{(1)} = A - \lambda_1 E_3$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen davon den Kern bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$E_A(\underbrace{1}_{=\lambda_1}) = \operatorname{Kern}(A_{(1)}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>Zu $\lambda_2 = 2$:</u>

$$A_{(2)} = A - \lambda_2 E_3$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Davon Kern:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$E_A(\underbrace{2}_{=\lambda_2}) = \text{Kern}(A_{(2)}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zu $\lambda_3 = -1$:

$$A_{(3)} = A - \lambda_3 E_3$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Davon Kern:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -\frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$\underbrace{E_A(-1)}_{=\lambda_3} = \operatorname{Kern}(A_{(3)}) = \left\langle \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nun ist $\mathbb{Q}^{3\times 1} = \underline{E_A(1)} \oplus \underline{E_A(2)} \oplus \underline{E_A(-1)}$.

Also ist $C = \left(\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

eine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$.

Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

wird also $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$=: D$

In diesem Sinne haben wir A diagonalisiert.

Probe:

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad =$$

Paßt.