Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

Siehe 25.01.21 - 1 bis 5.

Haben:
$$A_{(1)} = A - \overset{\lambda_1}{\tilde{2}} E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Kern}\left(A_{(1)}\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}} \right\rangle$$

$$\mathrm{Kern}\left(A_{(1)}^2\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}} \right\rangle$$

$l = 3$

$$\mathrm{Kern}\left(A_{(1)}^3\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{3,1}} \right\rangle$$

$$\| $$

$$H_A(\lambda_1)$$

Nun

- $y_{3,1} \overset{!}{=} x_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

- $A_{(1)} y_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir sollen $(x_{1,1}, x_{1,2}, A_{(1)} y_{3,1})$

durch Auswahl von $(x_{2,1})$

zu Basis von

$$\mathrm{Kern}\left(A_{(1)}^2\right) = \langle x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1} \rangle$$

ergänzen. Wir stellen fest:

$$A_{(1)} y_{3,1} = 0 \cdot x_{1,1} + 0 \cdot x_{1,2} + 1 \cdot x_{2,1},$$

und also ist

$(x_{1,1}, x_{1,2}, A_{(1)} y_{3,1})$ bereits

eine Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Somit ergänzen wir mit der

leeren Auswahl $()$ von $(x_{2,1})$.

- $A_{(1)}^2 y_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir sollen $(A_{(1)}^2 y_{3,1})$ mit

einer Auswahl von $(x_{1,1}, x_{1,2})$

zu einer Basis von

$$\operatorname{Kern}(A_{(1)}^1) = \langle x_{1,1}, x_{1,2} \rangle$$

ergänzen.

Es ist $\left(A_{(1)}^2 y_{3,1} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Es ist $\left(x_{1,1}, x_{1,2} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Auswahl: $y_{1,1} := x_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist auch

$$\left(A_{(1)}^2 y_{3,1} , y_{1,1} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\langle x_{1,1}, x_{1,2} \rangle$.

- Es resultieren die Hauptvektor-ketten ...

...

$$\left(A_{(1)}^2 y_{3,1}, A_{(1)} y_{3,1}, y_{3,1}\right) = \underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)}$$

und

$$\left(y_{1,1}\right) = \underbrace{\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$$

- Da wir nur einen Eigenwert $\lambda_1 = 2$ haben, erhalten wir die Jordanbasis

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}\right) = C_1 = C$$

mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...

... ist also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{matrix}} & \\ & \boxed{2}\end{pmatrix} =: J$$

in Jordanform.

(Das passiert also, wenn man mit einer Matrix A in Jordanform beginnt: sortiert man die Hauptvektorketten geeignet, so wird $A = J$. Das Beispiel ist nur zur Illustration geeignet.)

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & -1 \\ 0 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & -1-X \end{pmatrix}$$

$$= -(X-(-1))^3$$

$\Rightarrow$ Eigenwert $\lambda_1 = -1$

mit $aV_A(\lambda_1) = 3$

- Schrittweise ergänzte Basis von $H_A(\lambda_1)$:

$$A_{(1)} = A - (-1) E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}\left(A_{(1)}\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}} \right\rangle$$

$$A_{(1)}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

"neue" Nichtstufenspalte

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}\left(A_{(1)}^2\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}} \right\rangle$$

- Berechnung der Hauptvektorketten:

$$y_{2,1} := x_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{(1)}\, y_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ergänzung zu Kern $(A_{(1)})$ durch Auswahl aus $(x_{1,1}, x_{1,2})$:

$$\left(A_{(1)}\, y_{2,1} \, , \; x_{1,2} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: y_{1,1}} \right)$$

Hauptvektorketten:

$$\left(A_{(1)} y_{2,1}, \; y_{2,1} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(y_{1,1} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \text{ Mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ist } \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: J$$

• Probe:

$$AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$SJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad =$$

Passt.

<u>Bsp</u>

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & +1 \end{array}$$

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 7 & -6 & 3 \\ -2 & 6-X & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -X & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1-X & 7 & -6 & 2-X \\ -2 & 6-X & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -X & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 2-X \end{pmatrix}$$

$$= (X-2) \det \begin{pmatrix} -1-X & 7 & -6 & -1 \\ -2 & 6-X & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -X & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (X-2) \det \begin{pmatrix} -2-X & 10 & -8 & 0 \\ -2 & 6-X & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -X & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

$$\ldots = -(x-2)\det\begin{pmatrix} -2-x & 10 & -8 \\ -2 & 6-x & -4 \\ -1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

+1 +1

$$= -(x-2)\det\begin{pmatrix} -2-x & -x & -8 \\ -2 & -x & -4 \\ -1 & -x & -x \end{pmatrix}$$

$$= x(x-2)\det\begin{pmatrix} -2-x & 1 & -8 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -x \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ -1 \end{matrix}$$

$$= x(x-2)\det\begin{pmatrix} -x & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -x+4 \end{pmatrix}$$

$$= x(x-2)\det\begin{pmatrix} -x & -4 \\ 1 & -x+4 \end{pmatrix}$$

$$= x(x-2)(x^2-4x+4)$$

$$= x(x-2)^3$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad aV_A(\lambda_1) = 1$$
$$\lambda_2 = 2, \quad aV_A(\lambda_2) = 3$$

<u>Zu $\lambda_1 = 0$:</u> $\quad A_{(1)} = A - 0 \cdot E_4 = A$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 7 & -6 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \underset{E_A(\lambda_1)}{\underset{\parallel}{\mathrm{Kern}\left(A_{(1)}\right)}} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=x_{1,1}} \right\rangle$$

$$\dim \operatorname{Kern}(A_{(1)}) = 1 = aV_A(\lambda_1)$$

$$\rightarrow \quad E_A(\lambda_1) = \operatorname{Kern}(A_{(1)})$$

$$= H_A(\lambda_1)$$

$$\Rightarrow \quad y_{1,1} := x_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hauptvektorkette

$$\left(y_{1,1} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

<u>zu $\lambda_2 = 2$:</u>

$$A_{(2)} = A - 2E_4 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 7 & -6 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Kern}(A_2) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 7 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 12 & -12 & 6 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 12 & -12 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \text{„neu"} & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

25.01.21 – 16

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}\left(A_{(2)}^2\right) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{x_{2,1}} \right\rangle$$

$$\dim \operatorname{Kern}\left(A_{(2)}^2\right) = 3 = aV_A(\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}\left(A_{(2)}^2\right) = H_A(\lambda_2)$$

Berechnung der Hauptvektorketten:

$$y_{2,1} := x_{2,1} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A_{(2)}\, y_{2,1} = \begin{pmatrix}-3 & 7 & -6 & 3\\ -2 & 4 & 4 & 2\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot x_{1,1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} x_{1,2}$$

Ergänzung von $(A_{(2)} y_{2,1})$ zu Basis von $\text{Kern}(A_{(2)})$ mit Auswahl aus $(x_{1,1}, x_{1,2})$:

man kann beide nehmen, wir nehmen einmal $x_{1,2}$. Also:

Basis
$$\Big(A_{(2)} y_{2,1}, \underbrace{x_{1,2}}_{=: y_{1,1}}\Big) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
von $\text{Kern}(A_{(2)})$.

Hauptvektorketten:

$$\left(A_{(2)} y_{2,1}, y_{2,1}\right) = \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}}\Bigg)$$

$$\left(y_{1,1}\right) = \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}\Bigg)$$

Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ wird

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: J$$

Probe:

$$AS = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$SJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

=

Pa M.