Bsp Sei $V = {}_{\mathbb{R}}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Es ist $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$, da $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

eine Basis von $V$ ist.

Es ist $\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{c_2}\right)$ keine

Orthonormalbasis von $V$, da

$$\begin{pmatrix} c_1^t c_1 & c_1^t c_2 \\ c_2^t c_1 & c_2^t c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ersetzen wir $c_2$ durch $c_2 - c_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =: d_2$,

so steht darauf $c_1$ senkrecht.

Nur hat $c_1$ noch Länge $\sqrt{2}$.

Ersetzen wir also noch $c_1$ durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} =: d_1,$$

Dann ist $(d_1, d_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Es ist $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \in V$,

$d_2 = c_2 - c_1 \in V$.

Es ist $\begin{pmatrix} d_1^t d_1 & d_1^t d_2 \\ d_2^t d_1 & d_2^t d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $(d_1, d_2)$ eine Orthonormalbasis von $V$.

---

Wir wollen nun sehen, wie dies systematisch erreicht werden kann, wie man also per Algorithmus aus einer Basis eine Orthonormalbasis machen kann.

<u>Bsp</u> (Fortsetzung)

Sei $(c_1, c_2) := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Sei $V := {}_{\mathbb{R}}\langle c_1, c_2 \rangle$.

Dann ist $(c_1, c_2)$ eine Basis von $V$.

Gram-Schmidt:

$$d_1' := c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 := \| d_1' \|^{-1} \cdot d_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$d_2' := c_2 - (d_1^t \cdot c_2) \cdot d_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_2 := \| d_2' \|^{-1} \cdot d_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Orthonormalbasis

$$(d_1, d_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

<u>Probe:</u> $d_1^t d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

---

Die Probe auf Orthogonalität kann jeweils schon bei der Berechnung von $d_j'$ durchgeführt werden: es soll

$d_1^t d_j' = 0$, $d_2^t d_j' = 0$, ..., $d_{j-1}^t d_j' = 0$

sein: eine "Zwischenprobe" also.

(Ohne Zwischenprobe haben bei der Durchführung von Gram-Schmidt schon einige im Folgefehlermodus eine recht schwierige Aufgabe "neben der Spur" bearbeitet.)

**Bsp** Orthonormalbasis mittels Kreuzprodukt

Sei $c_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $c_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Es ist $\|c_1\| = 1$, $\|c_2\| = 1$, $c_1^t c_2 = 0$.

Es wird

$$c_1 \times c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Es ist dann

$$(c_1, c_2, c_1 \times c_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

__Bsp__ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i & i \\ 0 & 2-i & 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$

$\Longrightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i & -i \\ 0 & 2+i & -2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$

__Bsp__ Seien $(c_1, c_2) = \left( \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} \right)$ in $\mathbb{C}^{2\times 1}$.

Wegen $\det \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = 2-i \neq 0$ ist $(c_1, c_2)$ eine Basis von $\mathbb{C}^{2\times 1}$.

Es ist

$$\bar{c}_1^t c_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} = i-1 + 1+i = 2i \neq 0$$

Also ist $(c_1, c_2)$ keine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^{2\times 1}$.

Es ist $\| c_1 \| = \left( \bar{c}_1^{\,t} c_1 \right)^{1/2}$

$$= \left( \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{3} \, .$$

Auch dies zeigt, daß $(c_1, c_2)$ keine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^{2\times 1}$ ist.

<u>Bsp</u> (Fortsetzung)

Sei $(c_1, c_2) = \left( \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} \right)$ unsere betrachtete Basis von $\mathbb{C}^{2\times 1}$.

Gram - Schmidt:

$$d_1' := c_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 := \| d_1' \|^{-1} d_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_2' := c_2 - \left( \overline{d_1}^t \cdot c_2 \right) d_1$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 2i \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} + \frac{i}{3} \\ 1 + \frac{i}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2+i \\ 3+i \end{pmatrix}$$

<u>Zwischenprobe:</u> $\overline{d_1}^t d_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2+i \\ 3+i \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left( -2+i-2i-1+3+i \right) = 0$$

$$d_2 := \| d_2' \|^{-1} \cdot d_2' = \frac{1}{\sqrt{5+10}} \begin{pmatrix} -2+i \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2+i \\ 3+i \end{pmatrix}$$

Also ist

$$(d_1, d_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2+i \\ 3+i \end{pmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^{2\times 1}$.

---

Natürlich ist auch $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^{2\times 1}$.

Die von uns via Gram-Schmidt berechnete Orthonormalbasis diente nur der Illustration des Verfahrens in einem kleinen Fall.