Bsp

Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ nicht orthogonal,

da zwar schon $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$,

aber $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 1$

Man bekommt auch

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Also Vorsicht: Damit

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine Orthogonalmatrix ist,

muß $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine

Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n \times 1}$ sein.

<u>Bsp</u>

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

Es ist A symmetrisch.

(1) Wir wollen überprüfen, ob Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten in diesem Beispiel tatsächlich orthogonal aufeinanderstehen:

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -X \end{pmatrix}$$

$= \ldots$

$$\dots = \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & X & -X & 0 \\ 0 & X & 0 & -X \end{pmatrix}$$

08.
02.
21.
—
3

$$= X^2 \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

+1 +1

$$= X^2 \det \begin{pmatrix} 2-X & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= X^2 \det \begin{pmatrix} 2-X & 3 \\ 1 & -X \end{pmatrix} \cdot \det(-1) \cdot \det(-1)$$

$$= X^2 \left((2-X)(-X) - 3 \cdot 1 \right)$$

$$= X^2 (X^2 - 2X - 3)$$

$$= X^2 (X+1)(X-3)$$

Also hat A die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{mit} \quad aV_A(0) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{mit} \quad aV_A(-1) = 1$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \text{mit} \quad aV_A(3) = 1 .$$

<u>zu $E_A(0)$:</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \llcorner 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \llcorner 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E_A(0) = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>zu $E_A(-1)$:</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow \ldots$

$$\ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E_A(-1) = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zu $E_A(3)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E_A(3) = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_A(0)$

und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(-1)$

In der Tat ist: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Ähnlich: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Übrigens ist

$$
\begin{aligned}
{}_aV_A(0) &= 2 = {}_gV_A(0)\\
{}_aV_A(-1) &= 1 = {}_gV_A(-1)\\
{}_aV_A(3) &= 1 = {}_gV_A(3)
\end{aligned}
$$

Und somit ist A diagonalisierbar — wie jede symmetrische Matrix mit reellen Einträgen. Auch diese Vorhersage aus der Theorie bestätigt sich in diesem Beispiel.

(2) Wir wollen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonal diagonalisieren.

Dazu brauchen wir Orthonormalbasen der Eigenräume.

Zu $E_A(0)$: Gram-Schmidt auf die Basis $\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_2} \Big)$ loslassen:

$$d_1' = c_1$$

$$d_1 = \frac{1}{\|c_1\|} \cdot c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Orthonormalbasis

$$(d_1, d_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

von $E_A(0)$

zu $E_A(-1)$: Gram-Schmidt

auf die Basis $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

loslassen, gibt die

Orthonormalbasis $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

von $E_A(-1)$

<u>Zu $E_A(3)$:</u> Gram-Schmidt

auf die Basis $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ loslassen,

gibt die Orthonormalbasis

$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von $E_A(3)$

Konkatenation dieser Orthonormalbasen der Eigenräume gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ und damit die Orthogonalmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{6} & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Mit dieser ist dann

$$S^t A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} =: D$$

und somit A

orthogonal diagonalisiert.