Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Summe
Punkte	/3	/2	/3	/3	/7	/2	/2	/4	/4	/ 30

Mathematik 1 für Informatiker

Hausarbeit

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Falls in der Aufgabe Herleitungen verlangt sind, sind diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen. Bevorzugtes Format: Einzelne pdf-Datei mit Nachnamen im Dateinamen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien $c_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{4\times 1}$ gegeben.

Es ist (c_1, c_2, c_3) eine Basis von $V := {}_{\mathbb{R}}\langle c_1, c_2, c_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$.

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V :

Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Berechnen Sie folgende komplexe Zahl.

$$\frac{6+7\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}} = \boxed{}$$

(b) Skizzieren Sie die folgende Menge in der Gaußschen Zahlenebene.

$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z + \overline{z}\mathrm{i}) = 2 \,\}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 1+\alpha \\ 1 & \alpha & 0 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie: $\chi_A(X) =$

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

(c) Bestimmen Sie: $\mathrm{Rang}(A) =$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Zeigen Sie mit Induktion, dass folgende Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n(n+1)t & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X+3)(X-2)^4$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie die Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{E}_A(2)$:

Schrittweise ergänzte Basis von $\mathrm{H}_A(2)$:

Basis von $\mathrm{H}_A(-3)$:

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$S =$

$J =$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : x \mapsto f(x) := 2x + 1$.

(a) Untersuchen und entscheiden Sie, ob f injektiv ist.

(b) Untersuchen und entscheiden Sie, ob f surjektiv ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgende Menge.

$\{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + (\beta + \beta^2)x + \beta + 1 = 0\} =$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien $t_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Es ist (t_1, t_2, t_3) eine Basis von $T := {}_{\mathbb{F}_3}\langle t_1, t_2, t_3 \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Es ist (u_1, u_2) eine Basis von $U := {}_{\mathbb{F}_3}\langle u_1, u_2 \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ die Matrix mit Spaltentupel $(t_1, t_2, t_3, u_1, u_2)$.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A :

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Basis von Kern(A):

Basis von $T \cap U$:

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sind die Basen $B = (1, X, X^2)$ und $C = (X-1, X+X^2, -X^2-X+1)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$.

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} : f(X) \mapsto X^2 \cdot f(-1) + 2 \cdot f(-2X)$.

Bestimmen Sie:

${}_B\varphi_B =$

${}_B\mathrm{id}_C =$

${}_C\mathrm{id}_B =$

${}_C\varphi_C =$