Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Summe
Punkte	/3	/2	/3	/3	/7	/2	/2	/4	/4	/ 30

Mathematik 1 für Informatiker

Hausarbeit

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Falls in der Aufgabe Herleitungen verlangt sind, sind diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen. Bevorzugtes Format: Einzelne pdf-Datei mit Nachnamen im Dateinamen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien $c_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{4\times 1}$ gegeben.

Es ist (c_1, c_2, c_3) eine Basis von $V := {}_{\mathbb{R}}\langle c_1, c_2, c_3\rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$.

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

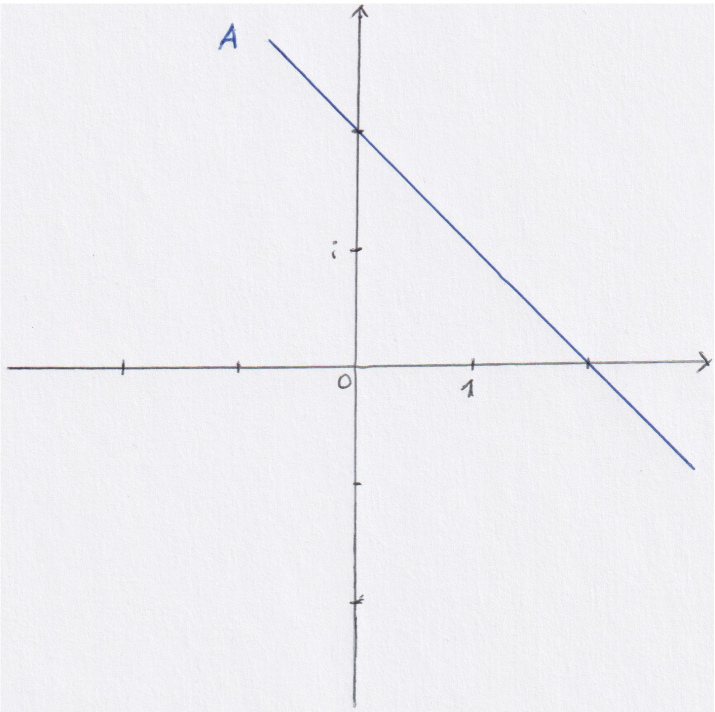
Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Berechnen Sie folgende komplexe Zahl.

$$\frac{6+7\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}} = \boxed{\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}}$$

(b) Skizzieren Sie die folgende Menge in der Gaußschen Zahlenebene.

$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \, : \, \mathrm{Re}(z + \overline{z}\mathrm{i}) = 2 \,\}$$



Aufgabe 3 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 1+\alpha \\ 1 & \alpha & 0 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie: $\chi_A(X) = \boxed{X(X+1)(X+\alpha)^2}$

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

$$\mathrm{aV}_A(0) = 1, \qquad \mathrm{aV}_A(1) = 1, \qquad \mathrm{aV}_A(\alpha) = 2$$

(c) Bestimmen Sie: $\mathrm{Rang}(A) = \boxed{3}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Zeigen Sie mit Induktion, dass folgende Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n(n+1)t & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsanfang:

Zum einen ist $\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}^0 = \mathrm{E}_3$. Zum anderen ist $\begin{pmatrix} 1 & 2{\cdot}0{\cdot}t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{\cdot}(0{+}1){\cdot}t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_3$.
Das ist dasselbe.

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sei als Induktionsvoraussetzung die Gleichung für $n-1$ bekannt.
Wir haben die Gleichung für n zu zeigen. Es wird

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1)t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n-1 & (n-1)((n-1)+1)t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1)t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n-1 & (n^2-n)t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & (n-1)\cdot 2t+(n^2-n)t+2t & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & (n^2+n)t & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n(n+1)t & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X+3)(X-2)^4$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie die Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{E}_A(2)$: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Schrittweise ergänzte Basis von $\mathrm{H}_A(2)$: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Basis von $\mathrm{H}_A(-3)$: $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : x \mapsto f(x) := 2x + 1$.

(a) Untersuchen und entscheiden Sie, ob f injektiv ist.

Seien $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $f(a) = f(b)$. Dann ist $2a + 1 = 2b + 1$ und somit $a = b$.

Daher ist f injektiv.

(b) Untersuchen und entscheiden Sie, ob f surjektiv ist.

Für $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist $f(a) = 2a + 1 \equiv_2 1$. Also ist $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.

Daher ist f nicht surjektiv.

Aufgabe 7 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgende Menge.

$$\{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + (\beta + \beta^2)x + \beta + 1 = 0\} = \boxed{\{\beta, \beta^2\}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien $t_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $t_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $t_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_1 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Es ist $(\, t_1\,,\, t_2\,,\, t_3\,)$ eine Basis von $T := {}_{\mathbb{F}_3}\langle\, t_1\,,\, t_2\,,\, t_3\,\rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Es ist $(\, u_1\,,\, u_2\,)$ eine Basis von $U := {}_{\mathbb{F}_3}\langle\, u_1\,,\, u_2\,\rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\\0&-1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ die Matrix mit Spaltentupel $(t_1, t_2, t_3, u_1, u_2)$.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{Kern}(A)$: $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

Basis von $T \cap U$: $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sind die Basen $B = (1, X, X^2)$ und $C = (X-1, X+X^2, -X^2-X+1)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$.

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} : f(X) \mapsto X^2 \cdot f(-1) + 2 \cdot f(-2X)$.

Bestimmen Sie:

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\1&-1&9\end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} \qquad {}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$${}_C\varphi_C = \begin{pmatrix}-2&-12&11\\-6&-4&6\\-4&-12&13\end{pmatrix}$$