

Aufgabe 6 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -t & 1 & -1+t & -1-t \\ 0 & 0 & -t & -t \\ t & -1 & 1-t & 1+t \\ -t & 1 & t & -t \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{4 \times 4}$.

(a) Bestimmen Sie: $\chi_A(X) =$

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Sei auf $M := \{2, 3, 4, 5\}$ die Relation (\approx) definiert durch $m \approx n \Leftrightarrow 2m + n \in 5\mathbb{Z}$ für $m, n \in M$.

Sei (\sim) die von (\approx) erzeugte Äquivalenzrelation. Bestimmen Sie (\approx) und (\sim) .

(\approx) :

(\sim) :

Aufgabe 8 (4 Punkte) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(a) Bestimmen Sie: $M := \{t \in \mathbb{R} : A_t \text{ ist invertierbar}\} =$

(b) Sei $t \in M$. Bestimmen Sie: $A_t^{-1} =$

Name, Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/3	/2	/4	/4	/8	/3	/2	/4	/ 30

Mathematik 1 für msv

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $c(X) := X^3 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ in $\mathbb{C}[X]$ gegeben.

Zerlegen Sie $c(X)$ in ein Produkt von Faktoren von Grad 1.

$c(X) =$

Aufgabe 2 (2 Punkte) Bestimmen Sie:

$\{(a, b) \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} : a \cdot b = 1\} =$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei $v_s := \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Sei $w := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$.

- (a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche v_s und w orthogonal aufeinander stehen.

- (b) Bestimmen Sie:

$$v_s \times w =$$

- (c) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche der Flächeninhalt des von v_s und w aufgespannten Parallelogramms gleich $\sqrt{2}$ ist.

- (d) Wir setzen $s = 1$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\langle v_1, w \rangle$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{4 \times 4}$. Sei $b := \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{4 \times 1}$.

- (a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

Ergebnis:

- (b) Bestimmen Sie: $\{x \in \mathbb{F}_4^{4 \times 1} : Ax = b\} =$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X+1)^5$ ist bekannt. Sei $A_{(1)} := A + E_5$.

- (a) Bestimmen Sie:

Basis von $E_A(-1)$:

Zeilenstufenform
von $A_{(1)}^2$:

Schrittweise ergänzte
Basis von $H_A(-1)$:

- (b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$S =$

$J =$