Aufgabe 6 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -\iota & 1 & -1+\iota & -1-\iota \\ 0 & 0 & -\iota & -\iota \\ \iota & -1 & 1-\iota & 1+\iota \\ -\iota & 1 & \iota & -\iota \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie: $\chi_A(X) =$ $X^3(X-1)$

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

$\mathrm{aV}_A(0) = 3, \qquad \mathrm{aV}_A(1) = 1$

Aufgabe 7 (2 Punkte)
Sei auf $M := \{2, 3, 4, 5\}$ die Relation $(\approx)$ definiert durch $m \approx n \;:\Leftrightarrow\; 2m + n \in 5\mathbb{Z}$ für $m,\, n \in M$.

Sei $(\sim)$ die von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation. Bestimmen Sie $(\approx)$ und $(\sim)$.

$(\approx)$:

$(\approx)$	2	3	4	5
2				
3			$\times$	
4	$\times$			
5				$\times$

$(\sim)$:

$(\sim)$	2	3	4	5
2	$\times$	$\times$	$\times$	
3	$\times$	$\times$	$\times$	
4	$\times$	$\times$	$\times$	
5				$\times$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie: $M := \{t \in \mathbb{R} : A_t \text{ ist invertierbar}\} =$ $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

(b) Sei $t \in M$. Bestimmen Sie: $A_t^{-1} =$ $\frac{1}{3-t}\begin{pmatrix} 4-t & t-2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1-t & 2 \end{pmatrix}$

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Summe
Punkte	/3	/2	/4	/4	/8	/3	/2	/4	/ 30

Mathematik 1 für msv

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $c(X) := X^3 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ in $\mathbb{C}[X]$ gegeben.

Zerlegen Sie $c(X)$ in ein Produkt von Faktoren von Grad 1.

$c(X) =$ $(X+1)(X - \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}))(X - \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}))$

Aufgabe 2 (2 Punkte) Bestimmen Sie:

$\{(a, b) \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} : a \cdot b = 1\} =$ $\{(1,1), (2,5), (4,7), (5,2), (7,4), (8,8)\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei $v_s := \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Sei $w := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche v_s und w orthogonal aufeinander stehen.

$$s = -\frac{2}{3}$$

(b) Bestimmen Sie:

$$v_s \times w = \begin{pmatrix} -1+2s \\ s \\ -2s+2 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche der Flächeninhalt des von v_s und w aufgespannten Parallelogramms gleich $\sqrt{2}$ ist.

$$s \in \{1,\ \tfrac{1}{3}\}$$

(d) Wir setzen $s = 1$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\langle v_1,\ w\rangle$.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{4\times 4}$. Sei $b := \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{4\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

Ergebnis: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(b) Bestimmen Sie: $\{x \in \mathbb{F}_4^{4\times 1} : Ax = b\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + {}_{\mathbb{F}_4}\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha+1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X+1)^5$ ist bekannt. Sei $A_{(1)} := A + \mathrm{E}_5$.

(a) Bestimmen Sie:

Basis von $\mathrm{E}_A(-1)$: $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Zeilenstufenform von $A_{(1)}^2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Schrittweise ergänzte Basis von $\mathrm{H}_A(-1)$: $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$