

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 2

Platzaufgaben

Platzaufgabe 5 Gegeben ist die Relation $R := \{(2, 5), (3, 3), (5, 4)\}$ auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- (a) Untersuchen Sie R auf Reflexivität, Symmetrie, Identitivität und Transitivität.
- (b) Bestimmen Sie die von R erzeugte Äquivalenzrelation und deren Äquivalenzklassen.

Platzaufgabe 6 Sei M die Menge der Abbildungen $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Die Relation R auf M sei gegeben durch $fRg :\Leftrightarrow f(n) \leq g(n)$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $f, g \in M$.

- (1) Untersuchen Sie R auf Reflexivität, Symmetrie, Identitivität und Transitivität.
Geben Sie hierfür gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.
- (2) Ist R eine Äquivalenzrelation? Ist R eine Ordnungsrelation?

Platzaufgabe 7 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(n) := 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt.

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bemerkung: Später werden wir auch $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$ schreiben.

Platzaufgabe 8 Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gegeben.

Sei $a_0(n) := n$.

Wir setzen $a_1(n) := \begin{cases} a_0(n) + 3 & \text{falls } a_0(n) \not\equiv_2 0 \\ a_0(n)/2 & \text{falls } a_0(n) \equiv_2 0. \end{cases}$

Wir setzen $a_2(n) := \begin{cases} a_1(n) + 3 & \text{falls } a_1(n) \not\equiv_2 0 \\ a_1(n)/2 & \text{falls } a_1(n) \equiv_2 0. \end{cases}$

Und so fort.

Man zeige: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $a_k(n) \in \{1, 3\}$.

Hierzu verwende man das allgemeine Induktionsprinzip für die induktiv geordnete Menge $\mathbb{Z}_{\geq 1}$, in der n liegt.

Blatt 2**Hausaufgaben**

Abgabe bis Di 17.11.2020 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 5 Sei $P := \{M \subset \mathbb{N} : |M| = 3\}$. Gegeben ist eine Relation ($\Diamond$) auf P . Untersuchen Sie ($\Diamond$) auf Reflexivität, Symmetrie, Identivität und Transitivität.

(a) $M \Diamond N :\Leftrightarrow (\exists n \in N \forall m \in M : m \leq n)$ für $M, N \in P$.

(b) $M \Diamond N :\Leftrightarrow |M \cap N| = 1$ für $M, N \in P$.

Hausaufgabe 6

(a) Gegeben ist die folgende Abbildung.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 4 & \text{falls } x < 0 \\ (x^2 - 2)^2 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Sei die Relation ($\sim$) auf $\mathbb{R}$ definiert durch $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Man zeige: Es ist ($\sim$) eine Äquivalenzrelation.

Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse [2].

(b) Gegeben ist auf $M := \{2, 3, 4, 5, 6\}$ die Relation $m \approx n :\Leftrightarrow m \in n\mathbb{Z}$ für $m, n \in M$. Sei ($\sim$) die von ($\approx$) erzeugte Äquivalenzrelation auf M . Geben Sie die Äquivalenzklassen von ($\sim$) an.

Hausaufgabe 7

(a) Zeigen Sie, dass $n^2 \geq 4n - 2$ ist für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$.

(b) Finden Sie das minimale $s \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, für welches die Aussage $2^s > s^2$ gilt.

Zeigen Sie die Aussage $2^n > n^2$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq s}$.

Hausaufgabe 8 Sei $M := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m < n\}$.

(a) Skizzieren Sie M als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) Für $(m, n) \in M$ schreiben wir

$$f(m, n) := (2m + 1) + (2m + 3) + \dots + (2(n - 1) + 1) = \sum_{k=m}^{n-1} (2k + 1).$$

Zeigen Sie die Aussage $f(m, n) = n^2 - m^2$ für alle $(m, n) \in M$.

Hinweis: Dazu kann sowohl das spezielle als auch das allgemeine Induktionsprinzip verwendet werden.