Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 6

Platzaufgaben

Platzaufgabe 19

(a) Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der folgenden komplexen Zahlen.

$$z_1 \;:=\; 1+\mathrm{i}\;, \qquad z_2 \;:=\; (1+\mathrm{i})^{-1}\;, \qquad z_3 \;:=\; \overline{1+\mathrm{i}}\;, \qquad z_4 \;:=\; -1+\mathrm{i}$$

(b) Berechnen Sie z_1^4 und z_4^4.

(c) Bestimmen Sie z_5 und z_6 in $\mathbb{C}$ mit $z_5^4 = z_6^4 = z_1^4 = z_4^4$ und $|\{z_1, z_4, z_5, z_6\}| = 4$.
Zeichnen Sie z_1, z_4, z_5 und z_6 in die Gaußsche Zahlenebene ein.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Argumenten von z_1, z_4, z_5 und z_6?

Platzaufgabe 20 Bestimmen Sie die Menge $M := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z^3 = 8\mathrm{i} \,\}$. Führen Sie dazu die folgenden Schritte durch.

(a) Finden Sie den Betrag $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und das Argument $\varphi \in [0, 2\pi[$ von $8\mathrm{i}$ und schreiben Sie

$$8\mathrm{i} = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)).$$

(b) Finden Sie $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\psi \in [0, \frac{2\pi}{3}[$ mit

$$8\mathrm{i} = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = \big(s(\cos(\psi) + \mathrm{i}\sin(\psi))\big)^3.$$

Skizzieren Sie das gefundene Element $s(\cos(\psi) + \mathrm{i}\sin(\psi))$ der Menge M in der Gaußschen Zahlenebene.

(c) Finden Sie alle 3 möglichen Winkel $\rho \in [0, 2\pi[$ mit

$$8\mathrm{i} = \big(s(\cos(\rho) + \mathrm{i}\sin(\rho))\big)^3.$$

Skizzieren Sie alle Elemente der Menge M in der Gaußschen Zahlenebene.

Platzaufgabe 21 Gegeben sind $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$.

(a) Berechnen Sie $(A^{\mathrm{t}} + A) \cdot B$.

(b) Berechnen Sie $B^{\mathrm{t}} \cdot (A + A^{\mathrm{t}})$.

(c) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1}.
Bestimmen Sie $A \cdot A^{-1}$ und $A^{-1} \cdot A$ durch direkte Rechnung.

Platzaufgabe 22 Bestimmen Sie eine Nullstelle von $X^3 - \frac{5}{2}X^2 + 3X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 6

Hausaufgaben

Abgabe bis Di 15.12.20 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 21 Bestimmen Sie die folgenden Mengen und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

(a) $A := \{ z \in \mathbb{C} : |z + 1 - \mathrm{i}| = 1 \}$

(b) $B := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z\mathrm{i} + \overline{z}) + \operatorname{Im}(z + \overline{z}\mathrm{i}) = 2 \}$

(c) $C := \{ z \in \mathbb{C} : z^4 = -8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) \}$

Hausaufgabe 22

(a) Seien $f(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ gegeben.
Zeigen Sie, dass $f(\overline{z}) = 0$ gilt.

(b) Sei $f(X) := X^3 + (1 - \mathrm{i})X^2 + X + (1 - \mathrm{i}) \in \mathbb{C}[X]$. Berechnen Sie $f(-1 + \mathrm{i})$.
Zerlegen Sie $f(X)$ in $\mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

(c) Zerlegen Sie $X^4 - \frac{4}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + 3X - \frac{2}{3} \in \mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

Hausaufgabe 23 Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}, \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

(a) Berechnen Sie $(A + B)^2$ und $A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

(c) Bestimmen Sie die Inversen $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.
Bestimmen Sie $C \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit $B \cdot C = \mathrm{E}_4$.

Hausaufgabe 24 Sei K ein Körper.
Zeigen Sie, dass für $t \in K$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ folgende Gleichung gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2(n-2)nt^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gilt diese Gleichung auch noch für $n = -1$?