Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 8

Platzaufgaben

Platzaufgabe 26 Gegeben sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) ein erzeugendes Tupel von $\mathbb{R}^{3\times 1}$?

(b) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig? Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$?

(c) Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$, die aus einer Auswahl der gegebenen Vektoren besteht.

Platzaufgabe 27 Gegeben sind die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

$$T := {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U := {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von T und eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T + U$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $T \cap U$.

Platzaufgabe 28 Gegeben sind die Vektoren $v := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Berechnen Sie $v^{\mathrm{t}} w$.

(b) Berechnen Sie $\|v\|$ und $\|w\|$.

(c) Berechnen Sie den Cosinus des von v und w eingeschlossenen Winkels.

(d) Berechnen Sie $v \times w$. Berechnen Sie zur Probe $v^{\mathrm{t}}(v \times w)$ und $w^{\mathrm{t}}(v \times w)$.

Platzaufgabe 29 Gegeben ist die folgende lineare Abbildung.

$$f : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2b-d \\ c+d \\ a+2b+c \end{pmatrix}$$

(a) Finden Sie eine Matrix A mit $f = \mathrm{mult}_A$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(f(\mathbb{R}^{4\times 1}))$. Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Dimension auch $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(A)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(\mathrm{mult}_A)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(f))$.

(c) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(A)) = \dim_{\mathbb{R}}(\{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; A \cdot x = 0 \,\})$ direkt.

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 8

Hausaufgaben

Abgabe bis Di 19.01.21 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 29 Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_s := \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ 2 \\ 5s \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R} : v \mapsto u^{\mathrm{t}} v$.

(a) Gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, für welches $(x,\, y,\, w_s)$ linear abhängig ist?

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist $(u,\, x,\, y,\, w_s)$ ein erzeugendes Tupel in $\mathbb{R}^{4\times 1}$?

(c) Bestimmen Sie $\dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1}))$. Bestimmen Sie damit $\dim(\mathrm{Kern}(f))$.

(d) Gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, für welches $(x,\, y,\, w_s)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ ist?

Hausaufgabe 30 Gegeben sind die folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_5^{5\times 1}$.

$$T := {}_{\mathbb{F}_5}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad U := {}_{\mathbb{F}_5}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von T und eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T + U$ und eine Basis von $T \cap U$.

Hausaufgabe 31 Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$u_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -s \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad w_s = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche der Rauminhalt des von u_s, v und w_s aufgespannten Parallelepipeds gleich 1 ist.

(b) Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto v \times \begin{pmatrix} d \\ b+c \\ a \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Matrix A mit $f = \mathrm{mult}_A$. Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$ und $\dim(f(\mathbb{R}^{4\times 1}))$.

Hausaufgabe 32 Wir nehmen zur Kenntnis und dürfen verwenden: Für einen Körper K und $n \geqslant 0$ ist $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ eine Basis von $K[X]_{\leqslant n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(X - 1,\, X + 1,\, X^2 + 1,\, X^3 + 1)$ eine Basis von $\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine bijektive lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 3}$, für welche $\varphi(X + 1) = X^2 + 1$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\psi : \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2} \to \mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 1} : f(X) \mapsto X \cdot f(-1) - f(1)$ eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{F}_3}(\psi(\mathbb{F}_3[X]_{\leqslant 2}))$ und $\dim_{\mathbb{F}_3}(\mathrm{Kern}(\psi))$.