Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 9

Platzaufgaben

Platzaufgabe 30 Gegeben sei $f := \mathrm{mult}_A : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.
Sei B die Standardbasis und $B' = (b'_1, b'_2) := \left(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$.
Sei C die Standardbasis und $C' = (c'_1, c'_2, c'_3) := \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor ${}_{B'}(2b'_1 - 5b'_2)$.

(b) Bestimmen Sie ${}_C f_B$ und ${}_{C'} f_{B'}$ direkt nach Definition von beschreibenden Matrizen.

(c) Bestimmen Sie ${}_B \mathrm{id}_{B'}$, ${}_C \mathrm{id}_{C'}$ und ${}_{C'} \mathrm{id}_C$.

(d) Bestimmen Sie ${}_{C'} f_{B'}$ erneut als ${}_{C'} f_{B'} = {}_{C'} \mathrm{id}_C \cdot {}_C f_B \cdot {}_B \mathrm{id}_{B'}$. Vergleichen Sie mit (b).

Platzaufgabe 31 Gegeben sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} : f(X) \mapsto f(X) - X \cdot f(2)\,.$$

Wir betrachten die Basis $(1, X, X^2)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$. Bestimmen Sie $\varphi\big(X^2\big)$, ${}_B\varphi\big(X^2\big)$ und ${}_B\varphi_B$.

Platzaufgabe 32 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(a) $A := \left(\begin{smallmatrix} \beta+1 & \beta^2 \\ \beta^2+1 & \beta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_8^{2\times 2}$.

(b) $B := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(c) $C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$.

Entscheiden Sie jeweils auch über die Invertierbarkeit der Matrix.

Platzaufgabe 33 Gegeben sei $A := \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Berechnen Sie jeweils eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

Berechnen Sie zur Probe für jeden darin auftretenden Basisvektor x das Produkt Ax und vergleichen Sie dieses mit λx, wobei λ den zugehörigen Eigenwert bezeichnet.

(d) Bestimmen Sie jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts.

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 9

Hausaufgaben

Abgabe bis Di 26.01.21 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 33 Gegeben ist die $\mathbb{F}_4$-lineare Abbildung

$$f : \mathbb{F}_4^{4\times 1} \to \mathbb{F}_4^{2\times 1} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2+\alpha x_3 \\ x_2+x_3+\alpha x_4 \end{pmatrix}.$$

Sei B die Standardbasis und $B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{F}_4^{4\times 1}$.

Sei C die Standardbasis und $C' := \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{F}_4^{2\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_C f_B$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B \mathrm{id}_{B'}$, ${}_{C'} \mathrm{id}_C$ und ${}_{C'} f_{B'}$.

(c) Bestimmen Sie Kern(f). Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

Hausaufgabe 34

Sei $s \in \mathbb{C}$ ein Parameter. Sei $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s & s \\ 0 & 1 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

(a) Berechnen Sie $\det(A_s)$ und $\det(s^2 A_s)$.

(b) Für welche Werte von $s \in \mathbb{C}$ ist $s^2 A_s$ invertierbar?

(c) Bestimmen Sie $B := A_s^{\mathrm{t}} \cdot A_s$ und $\det(B)$.

Hausaufgabe 35 Sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$.

(b) Es ist i ein Eigenwert von A. Bestimmen Sie seinen Eigenraum, seine algebraische Vielfachheit und seine geometrische Vielfachheit.

(c) Sei $B := (X, 1, X^2, X^3 + 1)$ eine Basis von $\mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$.
Sei $\varphi : \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$ die lineare Abbildung mit ${}_B \varphi_B = A$.
Bestimmen Sie ein $f(X) \in \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \smallsetminus \{0\}$, für das $\varphi\big(f(X)\big) = \mathrm{i} f(X)$ ist.

Hausaufgabe 36 Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis seines Eigenraums, seine algebraische Vielfachheit und seine geometrische Vielfachheit.