Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 10

Platzaufgaben

Platzaufgabe 34 Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_3^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ und die Eigenwerte von A.

(b) Begründen Sie, warum A diagonalisierbar ist.

(c) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S so, dass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie D an. Dazu ist es nicht nötig, S^{-1} zu berechnen.

Vergleichen Sie zur Probe SD und AS.

Platzaufgabe 35 Wir betrachten die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ aus Platzaufgabe 33. Insbesondere kennen wir bereits das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X-2)$ und die Eigenräume $\mathrm{E}_A(1) = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ und $\mathrm{E}_A(2) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ von A.

(a) Begründen Sie, warum A nicht diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(2)$.

(c) Ergänzen Sie die Basis von $\mathrm{E}_A(1)$ zu einer Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(1)$.

(d) Bilden Sie Hauptvektorketten und setzen Sie diese zu einer Jordanbasis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ für A zusammen.

(e) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an. Dazu ist es nicht nötig, S^{-1} zu berechnen.

Vergleichen Sie zur Probe SJ und AS.

Platzaufgabe 36 Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und den Eigenwert λ_1 von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$.

Und so fort.

Setzen Sie dies fort, bis Sie eine Basis des Hauptraums von A zum Eigenwert λ_1 erhalten haben.

Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für Informatiker

Blatt 10

Hausaufgaben

Abgabe bis Di 02.02.21 um 23:55 Uhr im Ilias.

Hausaufgabe 37 Wir betrachten die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \\ -7 & 2 & -4 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $D := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix von A ist. Geben Sie D an.

Hausaufgabe 38 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $\chi_A(X) = -(X-3)^3$ gegeben.
Sei $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $\chi_B(X) = -(X-4)^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie zum einzigen Eigenwert von A je eine Basis des Eigen- und des Hauptraums. Bestimmen Sie eine Jordanbasis und eine Jordansche Normalform von A.

(b) Bestimmen Sie zum einzigen Eigenwert von B je eine Basis des Eigen- und des Hauptraums. Bestimmen Sie eine Jordanbasis und eine Jordansche Normalform von B.

Hausaufgabe 39 Gegeben ist die von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} t & 2t-4 & t+1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = -(X-t)(X-5)(X+1)$.

(a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A_t in Abhängigkeit von t.
Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$, für welches A_t invertierbar, aber nicht diagonalisierbar ist.
Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$, für welches A_t diagonalisierbar, aber nicht invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform J von A_5.
Bestimmen Sie damit J^n und $\mathrm{tr}(A_5^n)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Hausaufgabe 40 Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und den Eigenwert λ_1 von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$. Ergänzen Sie für $i \geqslant 2$ die gefundene Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^{i-1})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^{i})$, sofern $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^{i-1}) \subset \mathrm{H}_A(\lambda_1)$.

Bestimmen Sie so eine Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(\lambda_1)$ von A zum Eigenwert λ_1.