Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2020/21

Mathematik 1 für Informatiker

# Blatt 11

## Platzaufgaben

**Platzaufgabe 37** Gegeben sind $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Seien $x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{Q}^{3\times 1}$.

Berechnen Sie $Ax_1$ und $Ax_2$. Berechnen Sie $Bx_1$ und $Bx_2$.

Bestätigen Sie damit: Es sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ Eigenwerte von $A$ und von $B$.

(b) Entscheiden Sie, ob die charakteristischen Polynome von $A$ und $B$ zerfallen, ohne diese zu berechnen.

(c) Bestimmen Sie die Spuren $\mathrm{tr}(A)$ und $\mathrm{tr}(B)$. Bestimmen Sie damit ohne weitere Rechnung die charakteristischen Polynome $\chi_A(X)$ und $\chi_B(X)$.

(d) Bestimmen Sie jeweils die geometrische und die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte von $A$ und $B$.

(e) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von $A$ ist. Geben Sie $J$ an. Vergleichen Sie zur Probe $AS$ und $SJ$.

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ so, dass $J' := T^{-1}BT$ eine Jordansche Normalform von $B$ ist. Geben Sie $J'$ an. Vergleichen Sie zur Probe $BT$ und $TJ'$.

**Platzaufgabe 38** Welche der folgenden Basen sind Orthonormalbasen?

(a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^{2\times 1}$

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^{2\times 1}$

(c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{C}^{2\times 1}$

(d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{C}^{2\times 1}$

**Platzaufgabe 39** Bestimmen Sie jeweils eine Orthonormalbasis der folgenden Unterräume.

(a) ${}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{2\times 1}$

(b) ${}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$

(c) ${}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$

In welcher Reihenfolge der Vektoren ist Gram-Schmidt einfach zu rechnen?

(d) ${}_{\mathbb{C}}\left\langle \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 0 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{3\times 1}$

Mathematik 1 für Informatiker

# Blatt 11

## Hausaufgaben

Abgabe bis Di 09.02.21 um 23:55 Uhr im Ilias.

**Hausaufgabe 41**
Wie in Hausaufgabe 40 sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$ mit $\chi_A(X) = X^6 \in \mathbb{F}_5[X]$.

Eine mögliche schrittweise ergänzte Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(0)$ ist gegeben durch

$$(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}) \;=\; \left( \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$ so, dass $J := S^{-1}\cdot A\cdot S$ eine Jordansche Normalform von $A$ ist. Geben Sie $J$ an. Vergleichen Sie zur Probe $A \cdot S$ und $S \cdot J$.

(b) Sei $B := A + 2\mathrm{E}_6 \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$.

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{F}_5^{6\times 6}$ so, dass $J' := T^{-1}\cdot B\cdot T$ eine Jordansche Normalform von $B$ ist. Geben Sie $J'$ an.

**Hausaufgabe 42** Es ist

$$A := \begin{pmatrix} \alpha{+}1 & \alpha{+}1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha{+}1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{5\times 5}$$

mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) \;=\; (X + \alpha)^5$ gegeben.
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{F}_4^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von $A$ ist. Geben Sie $J$ an.

**Hausaufgabe 43** Sei

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{7\times 7}\,.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{7\times 7}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von $A$ ist. Geben Sie $J$ an.

**Hausaufgabe 44**

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums ${}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums ${}_{\mathbb{C}}\left\langle \begin{pmatrix} 0\\\mathrm{i}\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\\mathrm{i}\\-1\\\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{4\times 1}$.