D. Merkt **Vortragsübung 9** WS 20/21 online

WebEx-Meeting am 14.01.21

Aufgabe 28: *Kreuzprodukt*

Gegeben seien die Vektoren $u, v, w, z \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

28.1 Berechnen Sie: $u \times v$, $v \times u$, $v \times w$ und $z^{\mathrm{t}} \cdot (u \times w)$.

28.2 Konstruieren Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene $\left\{x = w + s \cdot u + t \cdot v \in \mathbb{R}^{3\times 1}, s, t \in \mathbb{R}\right\}$ steht. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

28.3 Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das von u, v, w aufgespannt wird.

28.4 Gilt $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ für $a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$?

Aufgabe 29: *Lineare Abbildung*

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ Die Bilder von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

29.1 Bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ für $f = \mathrm{mult}_A$.

29.2 Geben Sie $\mathrm{Kern}\,(f)$, $\mathrm{Rang}\,(A)$ und das Bild von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ unter f an.

Aufgabe 30: *Basiswechselmatrix*

30.1 Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Geben Sie die Matrix ${}_E\mathrm{id}_E$ der identischen Abbildung $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}\colon v \mapsto v$ an.

30.2 Gegeben seien die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_E\mathrm{id}_C$, ${}_C\mathrm{id}_E$ und ${}_C\mathrm{id}_B$.

30.3 Es sind die Koordinatenvektoren

$${}_Cu = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad {}_Bv = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad {}_Ew = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in den entsprechenden Basen gegeben. Berechnen Sie ${}_Eu$, ${}_Cv$ und ${}_Bw$.