Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 14

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 53 Sei $f : \mathbb{R} \smallsetminus \{3\} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{2}{(x-3)^2}$ gegeben.

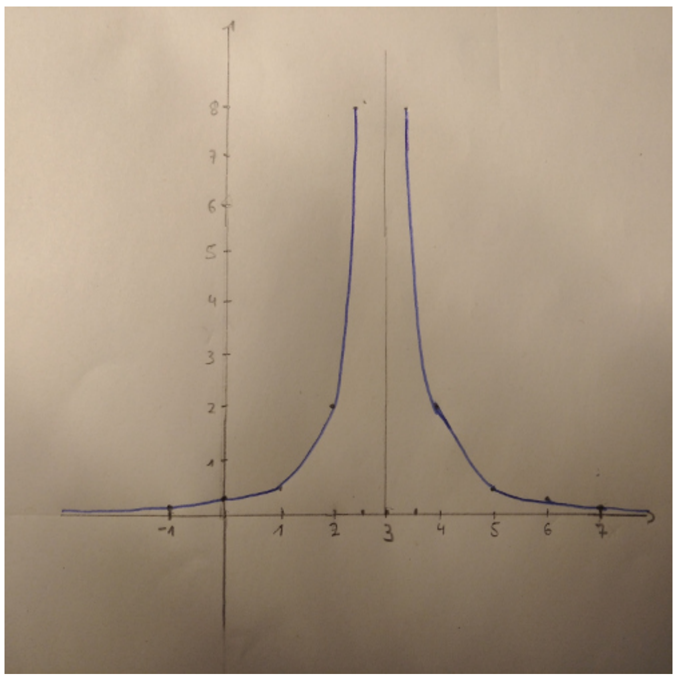
(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty))$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

(c) Zeigen Sie $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$ unter Verwendung von ε und δ.

Lösung.

(a) Die folgende Skizze zeigt den Graphen von f.



(b) Es ist $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{3\} : f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(+\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{3\} : f(x) > \varepsilon\}$.
Es gilt

$$f(x) > \varepsilon \iff \frac{2}{(x-3)^2} > \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} > (x-3)^2 \iff \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} > |x-3|\,.$$

Also ist $f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty)) = (\mathbb{R} \smallsetminus \{3\}) \cap \mathrm{U}_{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}}(3)$.

(c) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist $\delta := \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach (b) gilt

$$((\mathbb{R} \smallsetminus \{3\}) \cap \mathrm{U}_\delta(3)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{U}_\varepsilon(+\infty)).$$

Also ist $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$.

Hausaufgabe 54

Konstruieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften $(1, 2, 3)$.

(1) Es ist f nicht stetig an der Stelle $x_0 = 1$, aber stetig an allen anderen Stellen.
    Die Unstetigkeit an der Stelle $x_0 = 1$ soll hierbei mittels ε und δ begründet werden.

(2) Es ist $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

(3) Es ist $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Skizzieren Sie den Graphen von f.
Hinweis: Zur Definition von f darf eine Fallunterscheidung verwendet werden, um sich eine bereichsweise Definition zu ermöglichen.

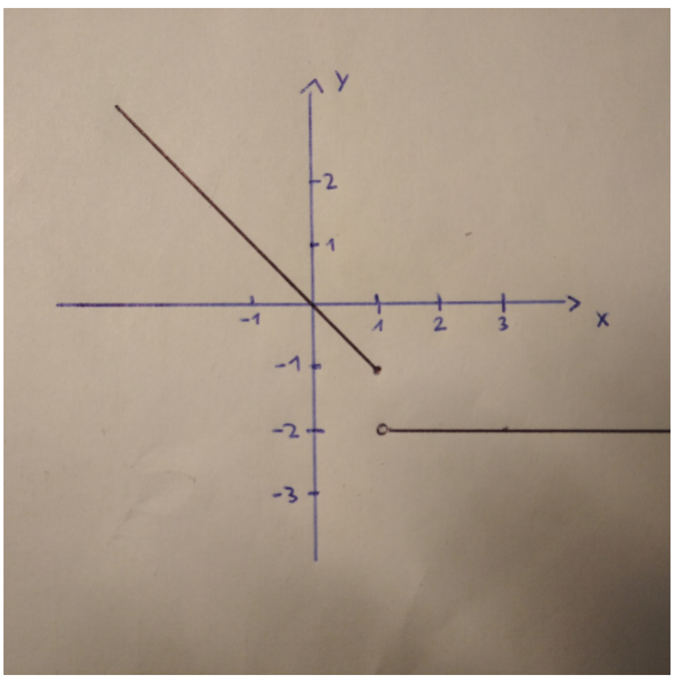
Lösung. Wir definieren $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) := \begin{cases} -x & \text{falls } x \leqslant 1 \\ -2 & \text{falls } x > 1\,. \end{cases}$

Zu (1). Es ist f stetig in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir zeigen, dass f in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.
Annahme, f ist stetig in 1. Dann ist $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$.
Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Wähle $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(\mathrm{U}_\delta(1)) \subseteq \mathrm{U}_\varepsilon(-1) = \,]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\,$.
Da $\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \in \mathrm{U}_\delta(1)$, ist $-2 = f(1 + \frac{\delta}{2}) \in \,]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\,$. Wir haben einen *Widerspruch.*

Zu (2). Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \to +\infty} -2 \;=\; -2\,.$

Zu (3). Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \to -\infty} -x \;=\; +\infty\,.$

Die folgende Skizze zeigt den Graphen von f.



Hausaufgabe 55

Gegeben seien Parameter $a,\, b \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Wir betrachten die Folge

$$(f_n)_{n\geqslant 0} := \Big(\sqrt{an}(\sqrt{n} - \sqrt{n+b})\Big)_{n\geqslant 0}\,.$$

(a) Bestimmen Sie $\Phi_{a,b} := \lim_{n\to\infty} f_n$.

(b) Skizzieren Sie die Menge $\{(a,b) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} : \Phi_{a,b} \in \mathrm{U}_{\frac{1}{2}}(0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{a,b} &= \lim_{n\to\infty} f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{an}(\sqrt{n} - \sqrt{n+b}) \\
&= \sqrt{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+b})(\sqrt{n} + \sqrt{n+b})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+b}} \\
&= \sqrt{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{n - (n+b)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+b}} \\
&= -b\sqrt{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+b}} \\
&= -b\sqrt{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{b}{n}}} \\
&= -b\sqrt{a} \cdot \frac{1}{1 + \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{b}{n}}} \\
&= -b\sqrt{a} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}}} \\
&= -b\sqrt{a} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1+0}} \\
&= -\frac{b\sqrt{a}}{2}\,.
\end{aligned}$$

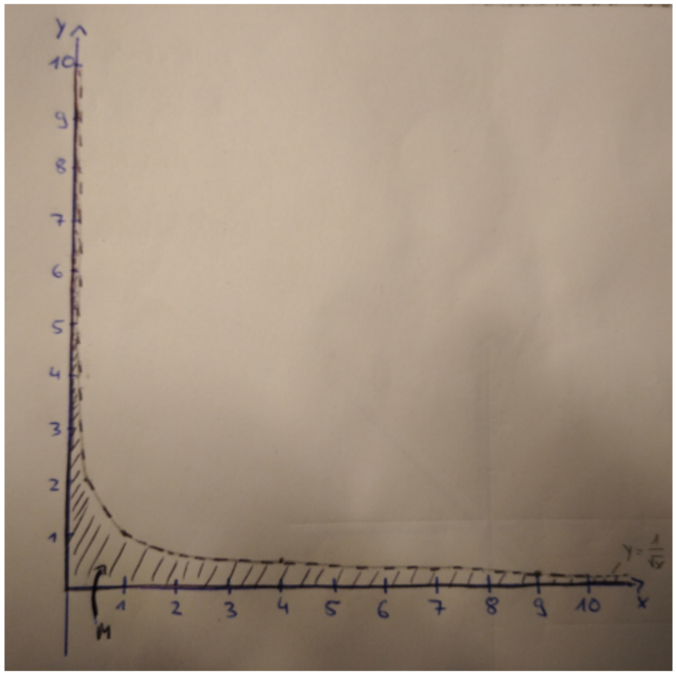
(b) Sei $M := \{(a,b) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} : \Phi_{a,b} \in \mathrm{U}_{\frac{1}{2}}(0)\}$.

Für $(a,b) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt

$$\begin{aligned}
(a,b) \in M \;&\Leftrightarrow\; \Phi_{a,b} \in \mathrm{U}_{\frac{1}{2}}(0) \\
&\Leftrightarrow\; -\tfrac{1}{2} < \Phi_{a,b} < \tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow\; -\tfrac{1}{2} < -\tfrac{b\sqrt{a}}{2} < \tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow\; -1 < -b\sqrt{a} < 1 \\
&\Leftrightarrow\; 1 > b\sqrt{a} > -1\,.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} M &= \{(a,b) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} : 1 > b\sqrt{a} > -1\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} : (a = 0) \vee ((a > 0) \wedge (b < \tfrac{1}{\sqrt{a}}))\} \\ &= (\{0\} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}) \cup \{(a,b) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} : b < \tfrac{1}{\sqrt{a}}\}\,. \end{aligned}$$



Hausaufgabe 56 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 17n - 12}{4n^2 - 3n + 2}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{11n^2 + 17n - 12}{-3n + 12 + 7n^2}}$
Markieren Sie dabei in Ihrer Rechnung die Stelle, an welcher Sie die Stetigkeit der Wurzelfunktion benötigen.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-1 + 3x^2 + 2x}{\frac{1}{2}x^2 - x + 2\cos(x)}$

Lösung.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 17n - 12}{4n^2 - 3n + 2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n + \frac{17}{n} - \frac{12}{n^2}}{4 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} n + \lim_{n\to\infty} \frac{17}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{+\infty + 0 - 0}{4 - 0 + 0} \\ &= +\infty\,. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{11n^2+17n-12}{-3n+12+7n^2}} \quad &\underset{\text{stetig}}{\overset{\text{Wurzelfunktion}}{=}} \quad \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{11n^2+17n-12}{-3n+12+7n^2}} \\
&= \quad \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{11+\frac{17}{n}-\frac{12}{n^2}}{-\frac{3}{n}+\frac{12}{n^2}+7}} \\
&= \quad \sqrt{\frac{\lim_{n\to\infty} 11+\lim_{n\to\infty}\frac{17}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n^2}}{-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n^2}+\lim_{n\to\infty} 7}} \\
&= \quad \sqrt{\frac{11+0-0}{-0+0+7}} \\
&= \quad \sqrt{\frac{11}{7}}\,.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{-1+3x^2+2x}{\frac{1}{2}x^2-x+2\cos(x)} \quad &= \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}+3+\frac{2}{x}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2\cos(x)}{x^2}} \\
&= \quad \frac{-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty} 3+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos(x)}{x^2}} \\
&= \quad \frac{-0+3+0}{\frac{1}{2}-0+0} \\
&= \quad 6\,.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch begründen, dass $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos(x)}{x^2}=0$ gilt.

Hierzu verwenden wir das Sandwich-Kriterium.

Da $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant +1$, ist

$$-\frac{2}{x^2} \;\leqslant\; \frac{2\cos(x)}{x^2} \;\leqslant\; +\frac{2}{x^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Zum einen gilt $\lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$. Zum anderen gilt $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2} = 0$.

Diese beiden Grenzwerte stimmen überein. Also ist $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos(x)}{x^2} = 0$.