Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 15

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 57 Gegeben ist die Folge

$$(a_k)_{k\geqslant 1} := \left(\frac{\cos(\frac{k\pi}{2})\cdot k+3}{2k}\right)_{k\geqslant 1} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$ unter Verwendung konvergenter Teilfolgen.

(b) Bestimmen Sie den Limes superior $\limsup_{k\to\infty} a_k$.

Lösung.

(a) Ausgehend von der Folge $\cos(\frac{k\pi}{2})_{k\geqslant 1}$ betrachten wir vier Teilfolgen.

(1) Sei $k_j := 4j$ für $j \in \mathbb{Z}_{j\geqslant 1}$. Wir erhalten die Teilfolge

$$(a_{k_j})_{j\geqslant 1} = \left(\frac{\cos(\frac{4j\pi}{2})\cdot 4j+3}{8j}\right)_{j\geqslant 1} = \left(\frac{1\cdot 4j+3}{8j}\right)_{j\geqslant 1}$$

mit Grenzwert $\frac{1}{2}$.

(2) Sei $k_j := 4j+1$ für $j \in \mathbb{Z}_{j\geqslant 0}$. Wir erhalten die Teilfolge

$$(a_{k_j})_{j\geqslant 0} = \left(\frac{\cos(\frac{(4j+1)\pi}{2})\cdot (4j+1)+3}{8j+2}\right)_{j\geqslant 0} = \left(\frac{0\cdot (4j+1)+3}{8j+2}\right)_{j\geqslant 0} = \left(\frac{3}{8j+2}\right)_{j\geqslant 0}$$

mit Grenzwert 0.

(3) Sei $k_j := 4j+2$ für $j \in \mathbb{Z}_{j\geqslant 0}$. Wir erhalten die Teilfolge

$$(a_{k_j})_{j\geqslant 0} = \left(\frac{\cos(\frac{(4j+2)\pi}{2})\cdot (4j+2)+3}{8j+4}\right)_{j\geqslant 0} = \left(\frac{-1\cdot (4j+2)+3}{8j+4}\right)_{j\geqslant 0} = \left(\frac{-4j+1}{8j+4}\right)_{j\geqslant 0}$$

mit Grenzwert $-\frac{1}{2}$.

(4) Sei $k_j := 4j+3$ für $j \in \mathbb{Z}_{j\geqslant 0}$. Wir erhalten die Teilfolge

$$(a_{k_j})_{j\geqslant 0} = \left(\frac{\cos(\frac{(4j+3)\pi}{2})\cdot (4j+3)+3}{8j+6}\right)_{j\geqslant 0} = \left(\frac{0\cdot (4j+3)+3}{8j+6}\right)_{j\geqslant 0} = \left(\frac{3}{8j+6}\right)_{j\geqslant 0}$$

mit Grenzwert 0.

Jede Zahl in $\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ lässt sich eindeutig als $4j$, $4j+1$, $4j+2$ oder $4j+3$ für ein $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ schreiben. Also haben wir alle Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen gefunden. Somit ist die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$ gleich $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

Alternativ hätten wir auch die beiden Teilfolgen mit Grenzwert 0 durch die Teilfolge $k_j := 2j+1$ für $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ersetzen können.

(b) Der Limes superior ist definiert als der maximale Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\geqslant 1}$. Also ist

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \max\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Hausaufgabe 58

(a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{4^k}$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^{2k-1}}$.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+1)^k}{2^k}$ konvergiert. Geben Sie in diesem Fall den Wert der Reihe an, in Abhängigkeit von a.

Lösung.

(a) Wir haben

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{4^k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{4^k}\right) - \left((-1)^0\frac{3}{4^0}\right) - \left((-1)^1\frac{3}{4^1}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{4^k}\right) - \frac{9}{4}.$$

Die verbleibende Reihe können wir nun in eine konvergente geometrische Reihe umformen.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{4^k} = 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k = 3\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{12}{5}$$

Zusammen erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{4^k} = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}$$

(b) Die Reihe kann wieder in eine konvergente geometrische Reihe umgeformt werden.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^{2k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{5^{2k}} = 5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(5^2)^k} = 5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{25^k} = 5\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{25}} = \frac{125}{24}$$

(c) Wir setzen $q_a = \frac{a+1}{2}$. Damit ist $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} q_a^k$ eine geometrische Reihe. Diese ist konvergent, falls $|q_a| < 1$. Für $|q_a| \geq 1$ konvergiert $(q_a^k)_{k\geqslant 0}$ nicht gegen 0 und damit ist die Reihe divergent.

$$|q_a| = 1 \Leftrightarrow |a+1| = 2 \Leftrightarrow a \in \{-3, 1\}$$

Also ist $|q_a| < 1$ genau dann, wenn $-3 < a < 1$. In diesem Fall ist die Reihe konvergent. Für $a \in \mathbb{R} \setminus]-3, 1[$ divergiert die Reihe.

Wir bestimmen noch den Wert der Reihe für $a \in]-3, 1[$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)^k}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{a+1}{2}} = \frac{2}{2 - 1 - a} = \frac{2}{1-a}$$

Hausaufgabe 59

(a) Bestimmen Sie $\sum_{k=2}^{n} (k+1)^{-1/2} - k^{-1/2}$ für $n \geqslant 2$. Berechnen Sie $\sum_{k=2}^{\infty} (k+1)^{-1/2} - k^{-1/2}$.

(b) Bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{n} \frac{6k - 2(k+1)}{3^{k+1}}$ für $n \geqslant 0$. Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6k - 2(k+1)}{3^{k+1}}$.

Lösung.

(a) Wir bestimmen die Teilsumme für $n \geq 2$. Dabei benutzen wir, dass es sich um eine Teleskopsumme handelt.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} (k+1)^{-1/2} - k^{-1/2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, konvergiert die Reihe. Wir erhalten

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k+1)^{-1/2} - k^{-1/2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} (k+1)^{-1/2} - k^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ können wir auch $(a_k)_{k\geqslant 2} := (k^{-1/2})_{k\geqslant 2}$ setzen. Wir erhalten wieder

$$\sum_{k=2}^{n} (k+1)^{-1/2} - k^{-1/2} = \sum_{k=2}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Damit ist auch

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k+1)^{-1/2} - k^{-1/2} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Wir stellen die Teilsumme zu einer Teleskopsumme um.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{6k - 2(k+1)}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{3^k} - \frac{2(k+1)}{3^{k+1}} = 2\left(\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{k+1}{3^{k+1}}\right) - \left(-\frac{k}{3^k}\right)\right)$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{6k - 2(k+1)}{3^{k+1}} = 2\left(-\frac{n+1}{3^{n+1}}\right) - 2\left(-\frac{0}{3^0}\right) = -\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$$

und wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6k - 2(k+1)}{3^{k+1}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{3^{n+1}} = 0.$$

Hausaufgabe 60 Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergent ist. Welche der Reihen ist absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{\sqrt{k}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+3}{2k+5}$

Lösung.

(a) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium um die Konvergenz der Reihe nachzuweisen. Dieses können wir anwenden, da alle drei Bedingungen des Kriteriums erfüllt sind.

> Die Folge $\left((-1)^k \frac{2}{\sqrt{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ ist alternierend, d.h. die Folgenelemente haben abwechselndes Vorzeichen.
>
> Es gilt $|(-1)^{k+1} \frac{2}{\sqrt{k+1}}| \leqslant |(-1)^k \frac{2}{\sqrt{k}}|$.
>
> Es ist $\lim_{k\to\infty} |(-1)^k \frac{2}{\sqrt{k}}| = 0$.

Damit ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{\sqrt{k}}$ konvergent.

Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent. Dazu müssen wir zeigen, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{2}{\sqrt{k}}| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k}}$ nicht konvergiert.

Dabei können wir ähnlich vorgehen, wie bei der harmonischen Reihe. Wir nutzen dazu aus, dass $\sqrt{k} \leq k$ für $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

$$\sum_{k=2^0}^{2^1-1} \frac{2}{\sqrt{k}} = 2 \geq 1$$

$$\sum_{k=2^1}^{2^2-1} \frac{2}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=2^1}^{2^2-1} \frac{2}{\sqrt{2^2}} \geq \sum_{k=2^1}^{2^2-1} \frac{2}{2^2} = 1$$

$$\sum_{k=2^2}^{2^3-1} \frac{2}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=2^2}^{2^3-1} \frac{2}{\sqrt{2^3}} \geq \sum_{k=2^2}^{2^3-1} \frac{2}{2^3} = 1$$

$$\sum_{k=2^3}^{2^4-1} \frac{2}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=2^3}^{2^4-1} \frac{2}{\sqrt{2^4}} \geq \sum_{k=2^3}^{2^4-1} \frac{2}{2^4} = 1$$

Setzen wir dies fort, erhalten wir für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ die folgende Abschätzung.

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{2^n-1} 1 = n \cdot 1$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2}{\sqrt{k}} \geq \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

Kennen wir bereits das Majorantenkriterium, können wir alternativ auch wie folgt argumentieren. Wie oben nutzen wir, dass $|\frac{1}{k}| \leq \frac{2}{\sqrt{k}}$ ist für $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Angenommen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k}}$ ist konvergent. Dann ist dies eine konvergente Majorante der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Folglich konvergiert die harmonische Reihe. Diese ist aber nicht konvergent. Wir haben einen *Widerspruch*.

Nach dem Majorantenkriterium kann also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k}}$ nicht konvergent sein.

(b) Die Folge $\left((-1)^k \frac{k+3}{2k+5}\right)_{k\geqslant 0}$ besitzt die Häufungspunkte $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Insbesondere konvergiert die Folge nicht gegen Null, denn dann wäre 0 der einzige Häufungspunkt.

Damit kann die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+3}{2k+5}$ nicht konvergent sein. Da jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist, kann sie auch nicht absolut konvergent sein.