Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2020

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 16

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 61

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$ für $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent ist.

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+(-1)^k)^k}{7^k}$?

Lösung.

(a) Wir verwenden das Quotientenkriterium. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/(2(k+1))!}{x^k/(2k)!}\right| = \left|\frac{x^{k+1}(2k)!}{x^k(2k+2)!}\right| = \frac{|x|}{(2k+1)(2k+2)} \longrightarrow 0\,.$$

Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$ für $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

(b) Für $s \in \mathbb{R}$ ist

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{(s+(-1)^k)^k}{7^k}\right|} = \frac{|s+(-1)^k|}{7}\,.$$

Also ist $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \iff \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{7}|s+(-1)^k| < 1\,.$
Wir haben die Häufungspunkte

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{7}|s+(-1)^{2j}| &= \tfrac{1}{7}|s+1| \\ \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{7}|s+(-1)^{2j+1}| &= \tfrac{1}{7}|s-1|\,. \end{aligned}$$

Für $s \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist

$$\limsup_{k\to\infty} \tfrac{1}{7}|s+(-1)^k| = \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{7}|s+(-1)^{2j}| = \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{7}|s+1| = \tfrac{1}{7}|s+1| = \tfrac{1}{7}(|s|+1)\,.$$

Für $s \in \mathbb{R}_{<0}$ ist

$$\limsup_{k\to\infty} \tfrac{1}{7}|s+(-1)^k| = \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{7}|s+(-1)^{2j+1}| = \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{7}|s-1| = \tfrac{1}{7}|s-1| = \tfrac{1}{7}(|s|+1)\,.$$

Also ist $\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{7}|s+(-1)^k| = \frac{1}{7}(|s|+1)$ für $s \in \mathbb{R}$.

Damit ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+(-1)^k)^k}{7^k}$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent für $|s|+1 < 7$, d.h. für $s \in \,]-6, 6[\,$.

Wir zeigen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+(-1)^k)^k}{7^k}$ für $s \in \mathbb{R} \setminus \,]-6,6\,[$ nicht konvergent ist.

Dazu zeigen wir, dass a_k für $s \in \mathbb{R} \setminus \,]-6,6\,[$ nicht gegen 0 konvergiert.

Genauer zeigen wir, dass $\limsup_{k\to\infty} |a_k| = +\infty$ ist für $s \in \mathbb{R} \setminus \,]-6,6\,[$.

Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \,]-6,6\,[$. Dann ist $\dfrac{|s|+1}{7} > 1$.

Fall 1: $s \in \mathbb{R}_{>6}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} |a_k| &= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{|s+(-1)^k|}{7}\right)^k \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|s+(-1)^{2j}|}{7}\right)^{2j} \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|s+1|}{7}\right)^{2j} \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|s|+1}{7}\right)^{2j} \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Fall 2: $s \in \mathbb{R}_{<-6}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} |a_k| &= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{|s+(-1)^k|}{7}\right)^k \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|s+(-1)^{2j+1}|}{7}\right)^{2j+1} \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|s-1|}{7}\right)^{2j+1} \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|s|+1}{7}\right)^{2j+1} \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 62 Sei

$$f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ :\ x\mapsto\begin{cases} x\cos(1/x) & \text{falls } x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\\ 0 & \text{falls } x=0\,.\end{cases}$$

Ihr Graph ist rechts abgebildet.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ für $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$.

(b) Sei $g:\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}:h\mapsto g(h):=\cos(1/h)$.

Bestimmen Sie die Folgengrenzwerte $\lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{2n\pi})$ und $\lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{(2n+1)\pi})$.

Untersuchen Sie, ob $\lim_{h\to 0} g(h)$ existiert.
Hinweis: Hierzu wurde die zweite Bemerkung in §4.3 ergänzt.

(c) Ist f in 0 differenzierbar? Untersuchen Sie dies direkt mit der Definition der Ableitung.

Lösung.

(a) Für $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ ist

$$f'(x)\ =\ 1\cdot\cos(1/x)+x\cdot(-\sin(1/x)\cdot\frac{-1}{x^2})\ =\ \cos(1/x)+\frac{1}{x}\sin(1/x)\,.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\ =\ \lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi)\ =\ \lim_{n\to\infty} 1\ =\ 1\,.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right)\ =\ \lim_{n\to\infty}\cos((2n+1)\pi)\ =\ \lim_{n\to\infty} -1\ =\ -1\,.$$

Wir zeigen, dass $\lim_{h\to 0} g(h)$ nicht existiert.

Annahme, $\lim_{h\to 0} g(h)$ existiert. Dann ist nach der zweiten Bemerkung in §4.3

$$1\ =\ \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\ =\ \lim_{h\to 0} g(h)\ =\ \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right)\ =\ -1\,.$$

Wir haben einen *Widerspruch.*

(c) Es ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\ =\ \lim_{h\to 0}\frac{h\cos(1/h)}{h}\ =\ \lim_{h\to 0}\cos(1/h)\,.$$

Da dieser Grenzwert nach (b) nicht existiert, ist f in 0 nicht differenzierbar.

Hausaufgabe 63 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ gegeben.
Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ und die zweite Ableitung $f''(x)$.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^4+1}$

Lösung.

(a) Es ist

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{1+2x^2} = \frac{-4x}{(1+2x^2)^2}\,.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{-4x}{(1+2x^2)^2} \\ &= \frac{-4\cdot(1+2x^2)^2 - (-4x)\cdot 2(1+2x^2)\cdot 4x}{(1+2x^2)^4} \\ &= \frac{-4\cdot(1+2x^2) + 32x^2}{(1+2x^2)^3} \\ &= \frac{24x^2-4}{(1+2x^2)^3}\,. \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\sqrt{x^4+1} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}} \\ &= \frac{6x^2\cdot\sqrt{x^4+1} - 2x^3\cdot\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} \\ &= \frac{6x^2\cdot(x^4+1) - 4x^6}{(x^4+1)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^6+6x^2}{(x^4+1)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 64 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x^2+3x)}{2x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin(x)-x}$

(c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x+3}$

Lösung.

(a) Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2+3x)}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(4x+3)\cos(2x^2+3x)}{2} = \frac{(4\cdot 0+3)\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

(b) Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin(x)-x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\cos(x)-1} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x}{-\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6}{-\cos(x)} = \frac{6}{-1} = -6\,.$$

(c) Es ist

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x+3} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to -3} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{1} = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+7}} = -\frac{3}{4}\,.$$