Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 17

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 65 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C} \,:\, x \mapsto (\mathrm{i} + \sqrt{x})^3$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_4(f, x, 1)$.

Lösung.

(a) Wir berechnen die Ableitungen mit Hilfe der Ketten- und Produktregel.

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{3(\mathrm{i}+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{3}{2}\left(\frac{2(\mathrm{i}+\sqrt{x})}{2x} - \frac{(\mathrm{i}+\sqrt{x})^2}{2x^{3/2}}\right) = \frac{3(x+1)}{4x^{3/2}} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{3(x+1)}{2x^{5/2}}\right) = -\frac{3(x+3)}{8x^{5/2}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^{5/2}} - \frac{5(x+3)}{2x^{7/2}}\right) = \frac{9(x+5)}{16x^{7/2}}
\end{aligned}$$

(b) Mit den Ableitungen aus Teil (a) erhalten wir das folgende Taylorpolynom.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_4(f,x,1) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\
&= (\mathrm{i}+1)^3(x-1)^0 + \frac{3}{2}(\mathrm{i}+1)^2(x-1)^1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2!}(x-1)^2 + (-\frac{3}{2})\cdot\frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{27}{8}\cdot\frac{1}{4!}(x-1)^4 \\
&= (2\mathrm{i}-2) + 3\mathrm{i}(x-1) + \frac{3}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + \frac{9}{64}(x-1)^4
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 66 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \sin(x^2)$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f, x, 2)$.

(c) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| \leqslant C \cdot |x - 2|^3$$

für $x \in [1, 3]$.

Lösung.

(a) Wir berechnen die Ableitungen mit Hilfe der Ketten- und Produktregel.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos(x^2) \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) \\ f'''(x) &= -4x\sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2) = -8x^3\cos(x^2) - 12x\sin(x^2) \end{aligned}$$

(b) Mit den Ableitungen aus Teil (a) erhalten wir das folgende Taylorpolynom.

$$\mathrm{T}_2(f, x, 2) = \sin(4) + 4\cos(4)(x - 2) + (\cos(4) - 8\sin(4))\,(x - 2)^2$$

(c) Für ein $\vartheta \in [0, 1]$ ergibt sich mit dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| &= |\mathrm{R}_n(f, x, 2, \vartheta)| = \left| \frac{f'''(2 + \vartheta(x - 2))}{3!}(x - 2)^3 \right| \\ &= \left| \frac{-8(2 + \vartheta(x - 2))^3\cos((2 + \vartheta(x - 2))^2) - 12(2 + \vartheta(x - 2))\sin((2 + \vartheta(x - 2))^2)}{6} \right| |x - 2|^3. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{-8(2 + \vartheta(x - 2))^3\cos((2 + \vartheta(x - 2))^2) - 12(2 + \vartheta(x - 2))\sin((2 + \vartheta(x - 2))^2)}{6} \right| \\ &\leqslant \left| \frac{4(2 + \vartheta(x - 2))^3\cos((2 + \vartheta(x - 2))^2)}{3} \right| + \left| 2(2 + \vartheta(x - 2))\sin((2 + \vartheta(x - 2))^2) \right| \end{aligned}$$

Wegen $|\sin(x)| \leqslant 1$ sowie $|\cos(x)| \leqslant 1$ für $x \in \mathbb{R}$ können wir weiter abschätzen.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{4(2 + \vartheta(x - 2))^3\cos((2 + \vartheta(x - 2))^2)}{3} \right| + \left| 2(2 + \vartheta(x - 2))\sin((2 + \vartheta(x - 2))^2) \right| \\ &\leqslant \frac{4}{3}\,|2 + \vartheta(x - 2)|^3 + 2\,|2 + \vartheta(x - 2)| \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $x \in [1, 3]$, d.h. $|x - 2| < 1$. Für alle $\vartheta \in [0, 1]$ ist daher auch $|\vartheta(x - 2)| < 1$, und wir erhalten $2 + \vartheta(x - 2) \in [1, 3]$. Dies liefert folgende Abschätzung.

$$\frac{4}{3}\left|(2 + \vartheta(x - 2))^3\right| + 2\,|(2 + \vartheta(x - 2))| \leqslant \frac{4}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 = 42$$

Setzen wir also $C := 42$, so ist

$$|f(x) - \mathrm{T}_2(f, x, 2)| = \left| \frac{f'''(2 + \vartheta(x - 2))}{3!} \right| |x - 2|^3 \leqslant C \cdot |x - 2|^3.$$

Hausaufgabe 67 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

(a) Bestimmen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ unter Verwendung einer Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\mathrm{T}_\infty(f, x, 0)$.

(c) Verifizieren Sie unter Verwendung des Restglieds, dass $f(\frac{1}{2}) = \mathrm{T}_\infty(f, \frac{1}{2}, 0)$ ist.
Hierbei darf $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} = 0$ verwendet werden.

Lösung.

(a) Durch Berechnen der Ableitungen $f^{(n)}(x)$ für kleine n erhalten wir den Ansatz für die folgende Formel.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$$

Wir überprüfen diese Formel mit Induktion.

Induktionsanfang. Es ist $(-1)^0 \dfrac{(0+1)!}{(1+x)^{0+2}} = \dfrac{1}{(1+x)^2} = f^{(0)}(x)$.

Induktionsschritt. Sei $n \geq 1$. Wir nehmen an, es gilt $f^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Dann wird

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (-1)^{n-1} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (-n-1) \frac{1}{(1+x)^{n+2}} = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}} . \end{aligned}$$

(b) Mit den Ableitungen aus Teil (a) erhalten wir die folgende Taylorreihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)!}{(1+0)^{k+2} k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k$$

(c) Nach dem Korollar von Taylor reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(f, \tfrac{1}{2}, 0, \vartheta_n) = 0$$

ist für jede Folge $(\vartheta_n)_{n\geqslant 0}$ mit Werten $\vartheta_n \in [0,1]$.
Das ist gleichbedeutend damit, $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathrm{R}_n(f, \frac{1}{2}, 0, \vartheta_n)| = 0$ zu zeigen.
Wir bestimmen zuerst das Restglied. Sei dazu $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ und $\vartheta \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_n(f, \tfrac{1}{2}, 0, \vartheta) &= \frac{f^{(n+1)}(0 + \vartheta(\frac{1}{2} - 0))}{(n+1)!} (\tfrac{1}{2} - 0)^{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(n+2)!}{(1+\frac{\vartheta}{2})^{n+3} \cdot (n+1)! \cdot 2^{n+1}} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n+2}{(1+\frac{\vartheta}{2})^{n+3} \cdot 2^{n+1}} \end{aligned}$$

Wegen $\vartheta \in [0,1]$ und daher $(1+\frac{\vartheta}{2})^{n+3} \geq 1$ erhalten wir die Abschätzung

$$|\mathrm{R}_n(f, \tfrac{1}{2}, 0, \vartheta)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{n+2}{(1+\frac{\vartheta}{2})^{n+3} \cdot 2^{n+1}} \right| \leq \frac{n+2}{2^{n+1}} \, .$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ und alle Folgen $(\vartheta_n)_{n \geqslant 0}$ mit Werten $\vartheta_n \in [0,1]$ haben wir also

$$0 \leq |\mathrm{R}_n(f, \tfrac{1}{2}, 0, \vartheta_n)| \leq \frac{n+2}{2^{n+1}} \, .$$

Das Sandwich-Kriterium zusammen mit dem Hinweis $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} = 0$ liefert uns damit $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(f, \frac{1}{2}, 0, \vartheta_n) = 0$.

Bemerkung. Kennen wir die Ableitung der Funktion $f(x) = 2^{x+1}$, lässt sich der Hinweis mit der Regel von l'Hôpital überprüfen.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2^{x+1}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)\cdot 2^{x+1}} = 0$$

Hausaufgabe 68 Von der 5-fach stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass sie das Taylorpolynom der Stufe 4

$$\mathrm{T}_4(f, x, 4) = 3 + 5(x-4)^2 - 5(x-4)^3$$

hat. Ferner sei bekannt, dass $|f^{(5)}(x)| \leqslant 12$ ist für $x \in [3, 5]$.

(a) Bestimmen Sie $f(4)$ und $f^{(3)}(4)$.

(b) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit

$$\mathrm{T}_4(g, x, 4) = \mathrm{T}_4(h, x, 4) = \mathrm{T}_4(f, x, 4).$$

(c) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f(5) \in [a, b]$ ist.

Lösung.

(a) Das Taylorpolynom der Stufe 4 zum Entwicklungspunkt 4 ist

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_4(f, x, 4) &= f(4)(x-4)^0 + f^{(1)}(4)(x-4)^1 + \frac{f^{(2)}(4)}{2}(x-4)^2 + \frac{f^{(3)}(4)}{6}(x-4)^3 \\ &= 3(x-4)^0 + 0(x-4)^1 + 5(x-4)^2 - 5(x-4)^3.\end{aligned}$$

Da die Koeffizienten eines Polynoms eindeutig bestimmt sind, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich $f(4) = 3$ und $f^{(3)}(4) = 6 \cdot (-5) = -30$.

(b) Wir können

$$g(x) = \mathrm{T}_4(f, x, 4) = 3 + 5(x-4)^2 - 5(x-4)^3$$

wählen und erhalten $\mathrm{T}_4(g, x, 4) = \mathrm{T}_4(f, x, 4)$.

Weitere Funktionen erhalten wir z.B. durch Addition von Polynomen

$$p(x) = \sum_{k=5}^{n} a_k (x-4)^k$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $n \geq 5$. Für $0 \leq k \leq 4$ gilt $p^{(k)}(4) = 0$, also ändern solche Summanden nichts am Taylorpolynom der Stufe 4.

Konkret können wir etwa $h(x) = 3 + 5(x-4)^2 - 5(x-4)^3 + 3(x-4)^5$ wählen.

(c) Nach dem Satz von Taylor gibt es ein $\vartheta \in [0, 1]$ mit

$$f(5) = \mathrm{T}_4(f, 5, 4) + \mathrm{R}_4(f, 5, 4, \vartheta) = 3 + \mathrm{R}_4(f, 5, 4, \vartheta).$$

Wir suchen eine Abschätzung für das Restglied, unter Verwendung von $|f^{(5)}(x)| \leqslant 12$ für $x \in [3, 5]$.

$$|\mathrm{R}_4(f, 5, 4, \vartheta)| = \left| \frac{f^{(5)}(4 + \vartheta(5-4))}{5!}(5-4)^5 \right| = \left| \frac{f^{(5)}(4+\vartheta)}{5!} \right| \leq \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $(4 + \vartheta) \in [3, 5]$ ist.

Für den Funktionswert von f gilt somit

$$|f(5) - 3| = |\mathrm{R}_4(f, 5, 4, \vartheta)| \leq \frac{1}{10}.$$

Wir erhalten $f(5) \in [\frac{29}{10}, \frac{31}{10}]$ und setzen $a := \frac{29}{10}$ und $b := \frac{31}{10}$.