Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2020

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 18

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 69 Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{2^{k+1}}(z+\mathrm{i})^k$.

(a) Bestimmen Sie ihren Entwicklungspunkt z_0 und ihren Konvergenzradius ρ.

(b) Skizzieren Sie ihre Konvergenzkreisscheibe.

(c) Für welche reellen $z \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Potenzreihe?

Lösung.

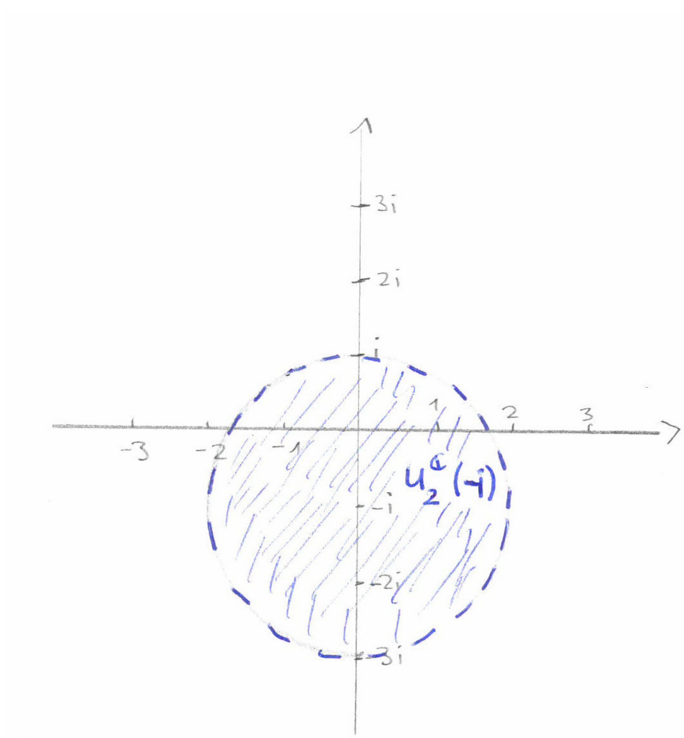
(a) Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = -\mathrm{i}$.

Wir berechnen den Konvergenzradius mit Hilfe der Quotientenfolge.

Es ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\mathrm{i}^{k+1}/2^{k+2}}{\mathrm{i}^k/2^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\mathrm{i}}{2}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Damit wird $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$.

(b) Die folgende Skizze zeigt die Konvergenzkreisscheibe $\mathrm{U}_2^{\mathbb{C}}(-\mathrm{i})$.



(c) Wir berechnen zunächst $\mathrm{U}_2^{\mathbb{C}}(-\mathrm{i}) \cap \mathbb{R}$, den Schnitt der Konvergenzkreisscheibe mit $\mathbb{R}$.
Für $z \in \mathbb{R}$ ist $|z-(-\mathrm{i})| = |z+\mathrm{i}| = \sqrt{z^2+1}$. Für $z \in \mathbb{R}$ gilt also

$$z \in \mathrm{U}_2^{\mathbb{C}}(-\mathrm{i}) \iff \sqrt{z^2+1} < 2 \iff z^2+1<4 \iff z^2<3 \iff |z| < \sqrt{3}\,.$$

Also ist die Potenzreihe absolut konvergent für $z \in \mathrm{U}_2^{\mathbb{C}}(-\mathrm{i}) \cap \mathbb{R} \; = \,]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,[\,.$
Die Potenzreihe ist nicht konvergent für $z \in \mathbb{R} \smallsetminus \big(\mathrm{U}_2^{\mathbb{C}}(-\mathrm{i}) \cup \partial \mathrm{U}_2^{\mathbb{C}}(-\mathrm{i})\big) \;=\; \mathbb{R} \smallsetminus [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
Bleibt also noch $z \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} = \mathbb{R} \cap \partial \mathrm{U}_2^{\mathbb{C}}(-\mathrm{i})$ zu untersuchen.
Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{2^{k+1}}(z+\mathrm{i})^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}z-1}{2}\right)^k$.
Für $z = \sqrt{3}$ und $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ ist $\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}z-1}{2}\right)^k\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}{2}\right|^k = \frac{1}{2}\cdot 1^k = \frac{1}{2}$.
Für $z = -\sqrt{3}$ und $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ ist $\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}z-1}{2}\right)^k\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-\sqrt{3}\mathrm{i}-1}{2}\right|^k = \frac{1}{2}\cdot 1^k = \frac{1}{2}$.
Also ist die Potenzreihe für $z \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ nicht konvergent.

Hausaufgabe 70 Wir haben die Potenzreihenentwicklung

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\,.$$

(a) Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklungen für $f'(x)$ und $f''(x)$.

(b) Finden Sie Polynome $u(x)$ und $v(x)$ mit $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k^2 x^k = \frac{u(x)}{v(x)}$ für $x \in \,]-1,+1[\,$.

Lösung.

(a) Wir leiten die Potenzreihenentwicklung für $f(x)$ summandenweise ab und erhalten

$$f'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k x^{k-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+1)x^k\,.$$

Wir leiten die Potenzreihenentwicklung für $f'(x)$ summandenweise ab und erhalten

$$f''(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k(k{+}1)x^{k-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+2}(k{+}1)(k{+}2)x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k^2{+}3k{+}2)x^k\,.$$

(b) Wir suchen zunächst $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$af(x) + bf'(x) + cf''(x) \;\stackrel{!}{=}\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k^2 x^k$$

für $x \in \,]-1,+1[\,$.
Wir nutzen die Potenzreihenentwicklungen für $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ und erhalten

$$a(-1)^k x^k + b(-1)^{k+1}(k+1)x^k + c(-1)^k(k^2+3k+2)x^k \;\stackrel{!}{=}\; (-1)^k k^2 x^k$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ und $x \in \,]-1,+1[\,$. Also haben wir

$$a - b(k+1) + c(k^2 + 3k + 2) \overset{!}{=} k^2$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Wir sortieren die Potenzen von k und erhalten

$$(a - b + 2c) \cdot 1 + (-b + 3c) \cdot k + c \cdot k^2 \overset{!}{=} k^2$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Dies führt auf das $\mathbb{R}$-lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a - b + 2c & = & 0 \\ -b + 3c & = & 0 \\ c & = & 1 \end{array}$$

mit Lösung $a = 1$, $b = 3$ und $c = 1$.

Wir berechnen noch durch direktes Ableiten: $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ und $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$.

Insgesamt gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k &= f(x) + 3f'(x) + f''(x) \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{3}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} \\ &= \frac{(1+x)^2 - 3(1+x) + 2}{(1+x)^3} \\ &= \frac{x^2 - x}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

für $x \in \,]-1,+1[\,$.

Damit sind $u(x) := x^2 - x$ und $v(x) := (1+x)^3$ Polynome mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k = \frac{u(x)}{v(x)}$$

für $x \in \,]-1,+1[\,$.

Hausaufgabe 71

(a) Bestimmen Sie $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x)^3 \cos(x) = a \sin(4x) + b \sin(2x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x^3)$.

(c) Berechnen Sie $\dfrac{|\mathrm{e}^z|}{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\sin(x)^3\cos(x) &= \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)^3\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\\
&= \frac{1}{16(-\mathrm{i})}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\\
&= \frac{\mathrm{i}}{16}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\\
&= \frac{\mathrm{i}}{16}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-2(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}))\\
&= \frac{\mathrm{i}}{16}(2\mathrm{i}\sin(4x)-2\cdot 2\mathrm{i}\sin(2x))\\
&= -\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $a=-\frac{1}{8}$ und $b=\frac{1}{4}$.

(b) Es ist

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x^3) = 3\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1/x} \overset{\text{l'H.}}{=} 3\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -3\lim_{x\to 0} x = -3\cdot 0 = 0\,.$$

(c) Sei $z=a+b\mathrm{i}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
|\mathrm{e}^z| &= |\mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}}| = |\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{b\mathrm{i}}| = |\mathrm{e}^a|\cdot|\mathrm{e}^{b\mathrm{i}}| = \mathrm{e}^a\cdot|\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)| = \mathrm{e}^a\cdot\sqrt{\cos(b)^2+\sin(b)^2}\\
&= \mathrm{e}^a\cdot 1 = \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\,.
\end{aligned}$$

Damit wird $\dfrac{|\mathrm{e}^z|}{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}}=1$ für $z\in\mathbb{C}$.

Hausaufgabe 72 Sei $f:\,]0,\pi[\,\to\,]-1,+1[\,: x\mapsto\cos(x)$ die eingeschränkte Cosinusfunktion. Ihre Umkehrfunktion ist die Arcuscosinusfunktion

$$f^{-1} =: \arccos : \;]-1,+1[\;\to\;]0,\pi[\;:\; x\;\mapsto\;\arccos(x)\,.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen $y=f(x)$, den Graphen $y=f^{-1}(x)$ und die Gerade $y=x$ in ein gemeinsames Schaubild.

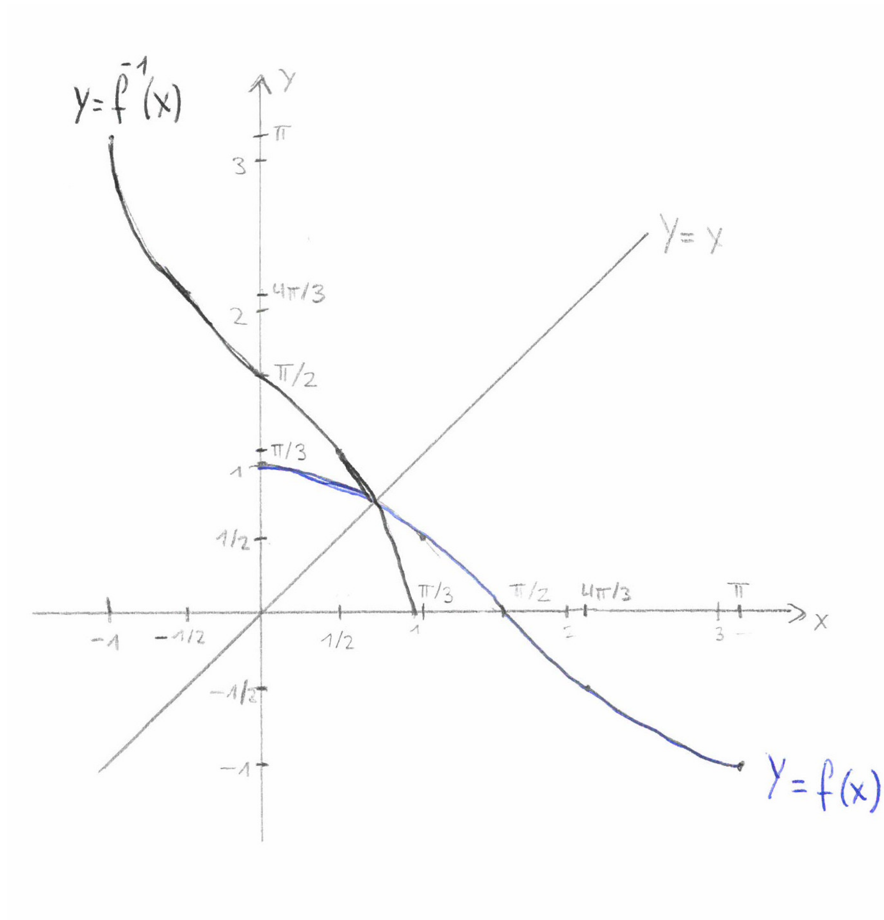
(b) Vereinfachen Sie $\sin(\arccos(x))^2$ zu einem Polynom, wobei $x\in\,]-1,+1[$.

(c) Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(x)$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(x)$.

Lösung.

(a) Die folgende Skizze zeigt die Graphen $y = f(x)$, den Graphen $y = f^{-1}(x)$ und die Gerade $y = x$.



(b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\sin(z)^2 = 1 - \cos(z)^2$.

Für $x \in \,]-1, +1[\,$ wird damit

$$\sin(\arccos(x))^2 \;=\; 1 - \cos(\arccos(x))^2 \;=\; 1 - x^2 \,.$$

(c) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos(x) \;=\; \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} \;=\; \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} \;=\; -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}$$

Für $x \in \,]-1, +1[\,$ ist $\arccos(x) \in \,]0, \pi[\,$ und damit $\sin(\arccos(x)) > 0$.
Für $x \in \,]-1, +1[\,$ ist also

$$\sin(\arccos(x)) \;=\; +\sqrt{\sin(\arccos(x))^2} \;=\; \sqrt{1 - x^2} \,.$$

Damit wird

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,.$$

(d) Es ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos(x) \;=\; -\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-\lim_{x\to 1} x^2}} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-1}} \;=\; -\frac{1}{0} \;=\; -\infty\,,$$

was man bei der Berechnung von Grenzwerten so zum Ausdruck bringen darf.

In der Skizze in (a) geht die Tangente an den schwarzen Graphen bei $x = 1$ also in eine Senkrechte zur x-Achse über.