Künzer, Nitsche, Ritter Sommersemester 2020

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 19

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 73

(a) Finden Sie a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x)^3\cos(x)^2 = a\sin(5x) + b\sin(3x) + c\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int \sin(x)^3\cos(x)^2\,\mathrm{d}x$.

(b) Seien $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto -\dfrac{9}{(x+2)^2}$ und $g : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(\frac{\pi(x+2)}{2})$ gegeben.

Skizzieren Sie die Fläche, die durch die Graphen von f und g sowie durch die y-Achse eingeschlossen ist. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Lösung.

(a) Wir benutzen das Lemma von de Moivre für die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\\ \sin(x) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\sin(x)^3\cos(x)^2 &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^3}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^3 \cdot \frac{1}{2^2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2\\ &= -\frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{32\mathrm{i}}\left((\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}) - (\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}}) - 2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{32\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\sin(5x) - 2\mathrm{i}\sin(3x) - 2\cdot 2\mathrm{i}\sin(x)\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin(x)\right)\end{aligned}$$

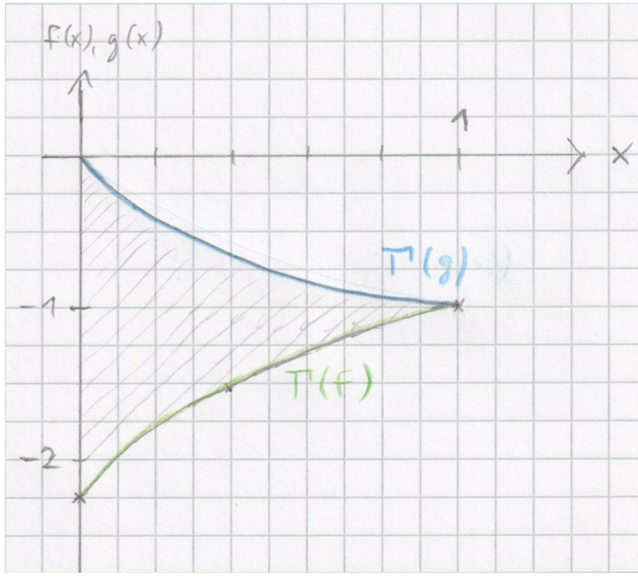
und erhalten $a = -\frac{1}{16}$, $b = \frac{1}{16}$ und $c = \frac{1}{8}$.

Dies können wir benutzen, um das Integral zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\int \sin(x)^3\cos(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{16}\left(-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin(x)\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{80}\cos(5x) - \frac{1}{48}\cos(3x) - \frac{1}{8}\cos(x)\right]\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\sin(\frac{\pi(x+2)}{2}) = -\sin(\frac{\pi x}{2})$. Damit ist $f(1) = g(1) = -1$.

Wir skizzieren zuerst die Graphen der beiden Funktionen. Die gesuchte Fläche ist nun der markierte Bereich.



Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnen wir

$$-\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

da die Fläche unter der x-Achse liegt.

Wir erhalten

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{9}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{9}{x+2}\right]_0^1 = 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi(x+2)}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi}.$$

Für den Flächeninhalt ergibt sich somit

$$-\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) = -(-\frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\,.$$

Als grobe Probe können wir den Wert mit der Skizze vergleichen. Es ist $\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \approx 0{,}86$, was anhand der Skizze plausibel erscheint.

Hausaufgabe 74

(a) Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ gegeben. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Bestimmen Sie die Untersumme und die Obersumme von f bezüglich der Unterteilung $\underline{x} := (-2, -1, 0, 1, 2)$ von $[-2, 2]$.

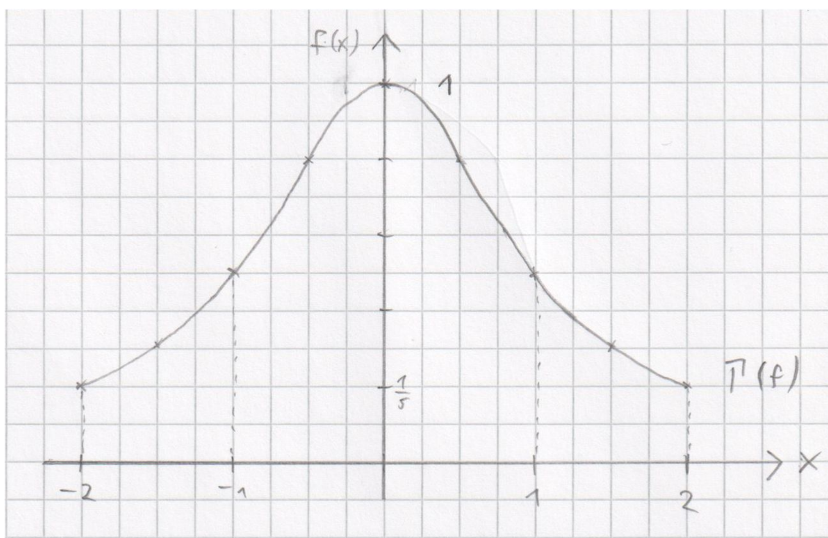
Verwenden Sie diese beiden, um $a,\ b \in \mathbb{R}$ zu finden mit $a \leqslant \arctan(2) \leqslant b$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int x^2 \cdot \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln(x)+1)}\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

(a) Wir skizzieren zuerst den Graphen von f. Die Unterteilung $\underline{x}$ ist zusätzlich eingezeichnet.



Wir berechnen die Untersumme und die Obersumme von f.

$$\mathrm{Unter}(f, \underline{x}) = (-1-(-2)) \cdot \frac{1}{5} + (0-(-1)) \cdot \frac{1}{2} + (1-0) \cdot \frac{1}{2} + (2-1) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$$

$$\mathrm{Ober}(f, \underline{x}) = (-1-(-2)) \cdot \frac{1}{2} + (0-(-1)) \cdot 1 + (1-0) \cdot 1 + (2-1) \cdot \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$$

Für die Abschätzung berechnen wir zuerst das Integral von f über $[-2, 2]$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_{-2}^{2} = \arctan(2) - \arctan(-2) = 2\arctan(2)$$

Es gilt nun $\mathrm{Unter}(f, \underline{x}) \leq \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{Ober}(f, \underline{x})$.

Mit den obigen Werten wird dies zu $\frac{7}{5} \leqslant 2\arctan(2) \leqslant 3$.

Wählen wir also $a = \frac{7}{10}$ und $b = \frac{3}{2}$, so erhalten wir $a \leq \arctan(2) \leq b$.

(b) Wir verwenden die Substitution $u(x) = 1 + x^3$ mit Ableitung $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$.

$$\int x^2 \cdot \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt{1+x^3} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \left[\frac{2}{9}u^{3/2}\right] = \left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}\right]$$

(c) Wir verwenden die Substitution $u(x) = 1 + \ln(x)$ mit Ableitung $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x(\ln(x)+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln(x)+1} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= [\ln(|u|)] = [\ln(|1+\ln(x)|)]$$

Hausaufgabe 75 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int (1+x^2) \cdot \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int 2x \cdot \ln(x)^2\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Wir bestimmen das Integral mit Hilfe zweifacher partieller Integration. In der Schreibweise des Lemmas setzen wir $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ sowie $g_1(x) = 1 + x^2$ für die erste Integration und $f_2'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ sowie $g_2(x) = x$ für die zweite Integration.

$$\begin{aligned}
\int (1+x^2) \cdot \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x &= \left[(1+x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}\right] - \int 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-(1+x^2) \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right] + \int x \cdot \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-(1+x^2) \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right] + \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}\right] - \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}(1+x+x^2)\mathrm{e}^{-2x}\right] - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right] = \left[-\frac{1}{4}\left(3+2x+2x^2\right)\mathrm{e}^{-2x}\right]
\end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen das Integral mit Hilfe zweifacher partieller Integration. In der Schreibweise des Lemmas setzen wir $f_1'(x) = 2x$ sowie $g_1(x) = \ln(x)^2$ für die erste Integration und $f_2'(x) = 2x$ sowie $g_2(x) = \ln(x)$ für die zweite Integration.

$$\begin{aligned}
\int 2x \cdot \ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= [x^2 \cdot \ln(x)^2] - \int x^2 \cdot \frac{2\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = [x^2 \cdot \ln(x)^2] - \int 2x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x^2 \cdot \ln(x)^2] - [x^2\ln(x)] + \int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [x^2(\ln(x)^2 - \ln(x))] + \int x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^2\left(\ln(x)^2 - \ln(x) + \frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 76 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \ln(2t) - \ln(t)\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \cosh(\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Vor der Integration vereinfachen wir zunächst die zu integrierende Funktion.

$$\ln(2t) - \ln(t) = \ln(2) + \ln(t) - \ln(t) = \ln(2)$$

Damit erhalten wir für das Integral

$$\int_1^2 \ln(2t) - \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln(2)\,\mathrm{d}t = [t \cdot \ln(2)]_1^2 = \ln(2).$$

(b) In einem ersten Schritt verwenden wir die Substitution $u(x) = \mathrm{e}^x$ mit $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$. Für die Grenzen erhalten wir $u(0) = 1$ und $u(\ln(3)) = 3$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(3)} \cosh(\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln(3)} \cosh(\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln(3)} \cosh(u) \cdot u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 \cosh(u) \cdot u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

In einem zweiten Schritt verwenden wir partielle Integration, um das verbleibende Integral zu bestimmen. In der Schreibweise des Lemmas setzen wir $f'(x) = \cosh(u)$ und $g(x) = u$.

$$\begin{aligned}\int_1^3 \cosh(u) \cdot u\,\mathrm{d}u &= [\sinh(u) \cdot u]_1^3 - \int_1^3 \sinh(u)\,\mathrm{d}u \\ &= [u \cdot \sinh(u) - \cosh(u)]_1^3 = 3\sinh(3) - \cosh(3) - \sinh(1) + \cosh(1)\end{aligned}$$

Optional können wir dieses Ergebnis noch wie folgt umschreiben.

$$\begin{aligned}3\sinh(3) - \cosh(3) - \sinh(1) + \cosh(1) &= \frac{3}{2}(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-3}) - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^{-3}) - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1}) \\ &= \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e}^{-3}\end{aligned}$$

Alternativ hätte man vor der Integration auch $\cosh(u) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})$ umformen können. Dieser Weg wäre aber auch nicht kürzer.