Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 20

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 77 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{16(x^2+5)}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{6x^3-x^2-2x+15}{2(x^2+9)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Wir faktorisieren $(x^2+4)^2 = (x+2\mathrm{i})^2(x-2\mathrm{i})^2$.

Wir stellen fest, dass der Nenner kleineren Grad hat als der Zähler.

Zur Partialbruchzerlegung setzen wir

$$\frac{16(x^2+5)}{(x^2+4)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+2\mathrm{i}} + \frac{B}{(x+2\mathrm{i})^2} + \frac{C}{x-2\mathrm{i}} + \frac{D}{(x-2\mathrm{i})^2}$$

an. Multiplikation mit $(x+2\mathrm{i})^2(x-2\mathrm{i})^2$ ergibt

$$\begin{aligned} 16(x^2+5) &\overset{!}{=} A(x+2\mathrm{i})(x-2\mathrm{i})^2 + B(x-2\mathrm{i})^2 + C(x+2\mathrm{i})^2(x-2\mathrm{i}) + D(x+2\mathrm{i})^2 \\ &= \quad A(x^3-2\mathrm{i}x^2+4x-8\mathrm{i}) + B(x^2-4\mathrm{i}x-4) \\ &\quad + C(x^3+2\mathrm{i}x^2+4x+8\mathrm{i}) + D(x^2+4\mathrm{i}x-4)\,. \end{aligned}$$

Nach Sortierung der Potenzen von x erhalten wir

$$\begin{aligned} 16x^2+80 \overset{!}{=} &\ (A+C)x^3 + (-2\mathrm{i}A+B+2\mathrm{i}C+D)x^2 \\ &+ (4A-4\mathrm{i}B+4C+4\mathrm{i}D)x + (-8\mathrm{i}A-4B+8\mathrm{i}C-4D)\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf folgendes lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} A+C &= 0 && \text{(Koeffizient bei } x^3\text{)} \\ -2\mathrm{i}A+B+2\mathrm{i}C+D &= 16 && \text{(Koeffizient bei } x^2\text{)} \\ 4A-4\mathrm{i}B+4C+4\mathrm{i}D &= 0 && \text{(Koeffizient bei } x^1\text{)} \\ -8\mathrm{i}A-4B+8\mathrm{i}C-4D &= 80 && \text{(Koeffizient bei } x^0\text{)} \end{aligned}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2\mathrm{i} & 1 & 2\mathrm{i} & 1 & 16 \\ 4 & -4\mathrm{i} & 4 & 4\mathrm{i} & 0 \\ -8\mathrm{i} & -4 & 8\mathrm{i} & -4 & 80 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4\mathrm{i} & 1 & 16 \\ 0 & -4\mathrm{i} & 0 & 4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -4 & 16\mathrm{i} & -4 & 80 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4\mathrm{i} & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -16 & 8\mathrm{i} & 64\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 32\mathrm{i} & 0 & 144 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4\mathrm{i} & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & -\mathrm{i} & -8\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i}/2 & 4\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i}/2 & -4\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 9\mathrm{i}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9\mathrm{i}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Also ist $A = \frac{9\mathrm{i}}{2}$, $B = -1$, $C = -\frac{9\mathrm{i}}{2}$ und $D = -1$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{16(x^2+5)}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^4 \frac{9\mathrm{i}/2}{x+2\mathrm{i}} + \frac{-1}{(x+2\mathrm{i})^2} + \frac{-9\mathrm{i}/2}{x-2\mathrm{i}} + \frac{-1}{(x-2\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \frac{9}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{x+2\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{x-2\mathrm{i}}\right) - \frac{1}{(x+2\mathrm{i})^2} - \frac{1}{(x-2\mathrm{i})^2} dx \\
&= \left[\frac{9}{2}\cdot(-2)\arctan\left(\frac{x}{-2}\right) + \frac{1}{x+2\mathrm{i}} + \frac{1}{x-2\mathrm{i}}\right]_0^4 \\
&= \left[9\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2x}{x^2+4}\right]_0^4 \\
&= 9\arctan(2) + \frac{2}{5} - 9\arctan(0) \\
&= 9\arctan(2) + \frac{2}{5}\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir faktorisieren $(x^2+9)(x+1)^2 = (x+3\mathrm{i})(x-3\mathrm{i})(x+1)^2$.

Wir stellen fest, dass der Nenner kleineren Grad hat als der Zähler.

Zur Partialbruchzerlegung setzen wir

$$\frac{6x^3 - x^2 - 2x + 15}{2(x^2+9)(x+1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+3\mathrm{i}} + \frac{B}{x-3\mathrm{i}} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

an. Multiplikation mit $2(x+3\mathrm{i})(x-3\mathrm{i})(x+1)^2$ ergibt

$$\begin{aligned}
6x^3 - x^2 - 2x + 15 &\overset{!}{=} 2A(x-3\mathrm{i})(x+1)^2 + 2B(x+3\mathrm{i})(x+1)^2 + 2C(x^2+9)(x+1) + 2D(x^2+9) \\
&= 2A(x^3 + (2-3\mathrm{i})x^2 + (1-6\mathrm{i})x - 3\mathrm{i}) + 2B(x^3 + (2+3\mathrm{i})x^2 + (1+6\mathrm{i})x + 3\mathrm{i}) \\
&\quad +2C(x^3 + x^2 + 9x + 9) + 2D(x^2+9)\,.
\end{aligned}$$

Nach Sortierung der Potenzen von x erhalten wir

$$\begin{aligned}
6x^3 - x^2 - 2x + 15 \overset{!}{=}\ &(2A + 2B + 2C)x^3 + ((4-6\mathrm{i})A + (4+6\mathrm{i})B + 2C + 2D)x^2 \\
&+ ((2-12\mathrm{i})A + (2+12\mathrm{i})B + 18C)x + (-6\mathrm{i}A + 6\mathrm{i}B + 18C + 18D)\,.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf folgendes lineares Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
2A + 2B + 2C &= 6 && \text{(Koeffizient bei } x^3) \\
(4-6\mathrm{i})A + (4+6\mathrm{i})B + 2C + 2D &= -1 && \text{(Koeffizient bei } x^2) \\
(2-12\mathrm{i})A + (2+12\mathrm{i})B + 18C &= -2 && \text{(Koeffizient bei } x^1) \\
-6\mathrm{i}A + 6\mathrm{i}B + 18C + 18D &= 15 && \text{(Koeffizient bei } x^0)
\end{aligned}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 4-6\mathrm{i} & 4+6\mathrm{i} & 2 & 2 & -1 \\ 2-12\mathrm{i} & 2+12\mathrm{i} & 18 & 0 & -2 \\ -6\mathrm{i} & 6\mathrm{i} & 18 & 18 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -6\mathrm{i} & 6\mathrm{i} & -2 & 2 & -13 \\ -12\mathrm{i} & 12\mathrm{i} & 16 & 0 & -8 \\ -6\mathrm{i} & 6\mathrm{i} & 18 & 18 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -6\mathrm{i} & 6\mathrm{i} & -2 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 20 & -4 & 18 \\ 0 & 0 & 20 & 16 & 28 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 12\mathrm{i} & -2+6\mathrm{i} & 2 & -13+18\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 20 & -4 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 12\mathrm{i} & -2+6\mathrm{i} & 0 & -14+18\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 12\mathrm{i} & 0 & 0 & -12+12\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Also ist $A = 1 - \mathrm{i}$, $B = 1 + \mathrm{i}$, $C = 1$ und $D = \frac{1}{2}$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{6x^3 - x^2 - 2x + 15}{2(x^2+9)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \frac{1-\mathrm{i}}{x+3\mathrm{i}} + \frac{1+\mathrm{i}}{x-3\mathrm{i}} + \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(\frac{1}{x+3\mathrm{i}} + \frac{1}{x-3\mathrm{i}}\right) + \left(\frac{\mathrm{i}}{x-3\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{x+3\mathrm{i}}\right) + \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln(x^2+9) - 2\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)}\right]_0^3 \\
&= \ln(18) - 2\arctan(1) + \ln(4) - \frac{1}{8} - \ln(9) + 2\arctan(0) - \ln(1) + \frac{1}{2} \\
&= \ln\left(\frac{4\cdot 18}{9\cdot 1}\right) - 2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \\
&= 3\ln(2) - \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 78

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. Skizzieren Sie auch die berechneten Flächen.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$

Welche der Integrationsgrenzen ist uneigentlich?

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

Verwenden Sie hierzu $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$.

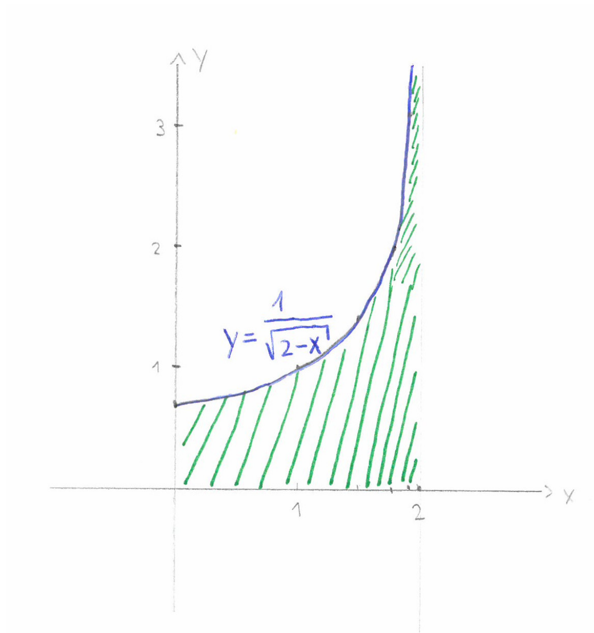
Lösung.

(a) Es ist 2 die uneigentliche Integrationsgrenze.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{v\to 2}\int_0^v \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &&= \lim_{v\to 2}\Big[-2\sqrt{2-x}\Big]_0^v \\
&= \lim_{v\to 2}\left(-2\sqrt{2-v} + 2\sqrt{2}\right) &&= -2\sqrt{2-2} + 2\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

Die folgende Skizze zeigt die berechnete Fläche.

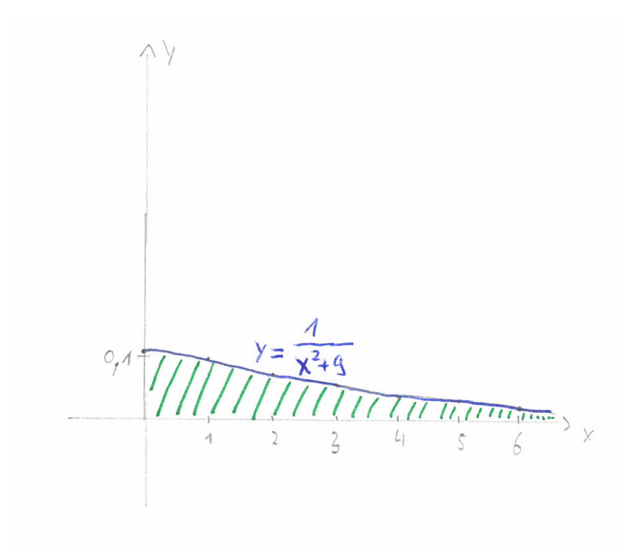


(b) Wir berechnen nach Vorumformung mittels Substitution

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x &= \lim_{v\to+\infty} \int_0^v \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x &&= \frac{1}{9}\lim_{v\to+\infty} \int_0^v \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9}\lim_{v\to+\infty} \int_0^{v/3} \frac{3}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &&= \frac{1}{3}\lim_{v\to+\infty} \big[\arctan(u)\big]_0^{v/3} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{v\to+\infty} (\arctan(v/3)-\arctan(0)) &&= \frac{1}{3}\lim_{v\to+\infty} \arctan(v/3) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

Alternativ hätte man auch eine Partialbruchzerlegung ansetzen können.

Die folgende Skizze zeigt die berechnete Fläche.



Hausaufgabe 79

(a) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$

Für welche $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{x^2} < 0\,?$

Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$?

(b) Konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$?

Lösung.

(a) Wir bestimmen zunächst mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\right] - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] \\
&= \left[-\frac{\ln(x)+1}{x}\right].
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{v\to+\infty}\int_2^{v} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{v\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)+1}{x}\right]_2^v \\
&= \lim_{v\to+\infty}\left(-\frac{\ln(v)+1}{v} + \frac{\ln(2)+1}{2}\right) \\
&= \frac{\ln(2)+1}{2} - \lim_{v\to+\infty}\frac{\ln(v)+1}{v} \\
&\overset{\text{l'H.}}{=} \frac{\ln(2)+1}{2} - \lim_{v\to+\infty}\frac{1/v}{1} \\
&= \frac{\ln(2)+1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x^{-1}\cdot x^2 - \ln(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist also

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{x^2} < 0 \quad &\iff \quad \frac{1-2\ln(x)}{x^3} < 0 \\ &\iff \quad \frac{1}{2} < \ln(x) \\ &\iff \quad \mathrm{e}^{1/2} < x\,. \end{aligned}$$

Wir wollen das Integralkriterium auf die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$ anwenden.

Dazu müssen wir nachweisen, dass $\frac{\ln(x_1)}{x_1^2} \geqslant \frac{\ln(x_2)}{x_2^2} \geqslant 0$ ist für $2 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

Es ist dort $\frac{\ln(x_2)}{x_2^2} \geqslant 0$.

Wir zeigen nun, dass für $x \geqslant 2$ die Ungleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{x^2} \leqslant 0$ gilt.

Es ist $\mathrm{e}^{1/2} \approx 1{,}6487 < 2$. Nach obigem ist damit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{x^2} < 0$ für $x \geqslant 2$.

Also können wir das Integralkriterium anwenden und folgenden Schluss ziehen:

Da $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist auch $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$ konvergent.

Es ist $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)+1}{2} \approx 0{,}8466$.

Es ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2} \approx 0{,}9375$. Einen genauen Wert können wir nicht berechnen.

(b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, also jedenfalls für $x \in [2, +\infty[$, ist $\left|\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

Außerdem ist

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to+\infty} \int_2^{v} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^v = \lim_{v\to+\infty} \left(-\frac{1}{v}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \lim_{v\to+\infty}\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\,.$$

Also ist $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Es ist $\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}0317$. Einen genauen Wert können wir nicht berechnen.

Hausaufgabe 80 Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := \sin(xy)\sin(z)\,.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla_f(x,y,z)$.

(b) Berechnen Sie die Hessematrix $\mathrm{H}_f(x,y,z)$.

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos(xy)\sin(z) \\ x\cos(xy)\sin(z) \\ \sin(xy)\cos(z) \end{pmatrix}$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy)\sin(z) & (\cos(xy)-xy\sin(xy))\sin(z) & y\cos(xy)\cos(z) \\ (\cos(xy)-xy\sin(xy))\sin(z) & -x^2\sin(xy)\sin(z) & x\cos(xy)\cos(z) \\ y\cos(xy)\cos(z) & x\cos(xy)\cos(z) & -\sin(xy)\sin(z) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$