Künzer, Nitsche, Ritter

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 21

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 81 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^{x+z}(x^2 + xy + y^2 + 3z)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_f(x, y, z)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Lösung.

(a) Eine direkte Rechnung ergibt

$$\nabla_f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x+z} \cdot \begin{pmatrix} x^2 + xy + y^2 + 3z + 2x + y \\ x + 2y \\ x^2 + xy + y^2 + 3z + 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x+z} \cdot \begin{pmatrix} x^2 + xy + y^2 + 3z + 4x + 2y + 2 & x + 2y + 1 & x^2 + xy + y^2 + 3z + 2x + y + 3 \\ x + 2y + 1 & 2 & x + 2y \\ x^2 + xy + y^2 + 3z + 2x + y + 3 & x + 2y & x^2 + xy + y^2 + 3z + 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus der Bedingung $\nabla_f(x, y, z) = 0$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x+z}(x^2 + xy + y^2 + 3z + 2x + y) &= 0 \\ \mathrm{e}^{x+z}(x + 2y) &= 0 \\ \mathrm{e}^{x+z}(x^2 + xy + y^2 + 3z + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Da $\mathrm{e}^{x+z} > 0$ für alle $x, z \in \mathbb{R}$, können wir alle Gleichungen durch den Faktor e^{x+z} teilen.

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $x = -2y$. Setzen wir dies in die Differenz der ersten und dritten Gleichung ein, erhalten wir

$$2x + y - 3 = -4y + y - 3 = 0.$$

Dies ergibt $y = -1$ und also $x = 2$.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert schließlich $z = -2$.

Es besitzt also f genau eine Flachstelle. Diese ist $(2, -1, -2)$.

(c) Für die Entscheidung in Teil (c) setzen wir die Flachstelle aus Teil (b) in die Hessematrix von f ein.

$$\mathrm{H}_f(2,-1,-2) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Hauptminoren von $\mathrm{H}_f(2,-1,-2)$ sind

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(2,-1,-2)) &= 5 \\ \mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(2,-1,-2)) &= 9 \\ \mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(2,-1,-2)) &= 9 \end{aligned}$$

Nach dem Hauptminorenkriterium ist $\mathrm{H}_f(2,-1,-2)$ damit positiv definit.

Somit ist $(2,-1,-2)$ eine lokale Minimalstelle von f.

Hausaufgabe 82 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto (x^2-1)(x^2+(y-1)^2-2)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y)$ und $\mathrm{H}_f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle, die in $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ liegt, ob sie eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Lösung.

(a) Eine direkte Rechnung mit Hilfe der Produktregel ergibt

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(x^2+(y-1)^2-2) + 2x(x^2-1) \\ 2(x^2-1)(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(2x^2+y^2-2y-2) \\ 2(x^2-1)(y-1) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(6x^2+y^2-2y-2) & 4x(y-1) \\ 4x(y-1) & 2(x^2-1) \end{pmatrix}.$$

(b) Aus der Bedingung $\nabla_f(x,y,z) = 0$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x(2x^2+y^2-2y-2) &= 0 \\ 2(x^2-1)(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung führt auf $x^2 = 1$ oder $y = 1$.

Fall $x = 1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $2(y^2-2y) = 0$. Wir erhalten die zwei Flachstellen $(1,0)$ und $(1,2)$.

Fall $x = -1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $-2(y^2-2y) = 0$. Wir erhalten die zwei Flachstellen $(-1,0)$ und $(-1,2)$.

Fall $y = 1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $2x(2x^2-3) = 0$. Wir erhalten die drei Flachstellen $(0,1)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$ und $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$.

Insgesamt hat f also die folgenden sieben Flachstellen.

$$(1,0), \qquad (1,2), \qquad (-1,0), \qquad (-1,2), \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right), \qquad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},1\right), \qquad (0,1)$$

(c) Von den sieben Flachstellen aus Teil (b) liegen die folgenden vier in $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

$$(1,0), \qquad (1,2), \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right), \qquad (0,1)$$

Diese Flachstellen setzen wir jeweils in die Hessematrix von f ein.

$$\mathrm{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_f(1,2) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{H}_f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}_f(0,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir benutzen das Hauptminorenkriterium um zu entscheiden, ob es sich bei den Flachstelle jeweils um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Flachstelle $(1,0)$. Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(1,0)) = 8$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(1,0)) = -16$. Also ist $\mathrm{H}_f(1,0)$ indefinit, und $(1,0)$ ist eine Sattelstelle.

Flachstelle $(1,2)$. Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(1,2)) = 8$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(1,2)) = -16$. Also ist $\mathrm{H}_f(1,2)$ indefinit, und $(1,2)$ ist eine Sattelstelle.

Flachstelle $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$. Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)) = 12$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)) = 12$. Also ist $\mathrm{H}_f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$ positiv definit, und $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$ ist eine lokale Minimalstelle.

Flachstelle $(0,1)$. Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0,1)) = -6$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0,1)) = 12$. Also ist $\mathrm{H}_f(0,1)$ negativ definit, und $(0,1)$ ist eine lokale Maximalstelle.

Hausaufgabe 83

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \left(\begin{smallmatrix} t & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t positiv definit ist.
Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t negativ definit ist.

(b) Gegeben ist die Funktion $f : [-2,2] \times [0,2] \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sin(\pi y)(x^2 - y)$.

Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\{\, (x,y) \in [-2,2] \times [0,2] \;:\; f(x,y) = 0 \,\}$.
Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f positiven Funktionswert hat.
Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f negativen Funktionswert hat.

Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $(1,1)$ und $(-1,1)$ lokale Extremstellen von f sind.

Lösung.

(a) Wir wollen das Hauptminorenkriterium benutzen. Dazu berechnen wir die Hauptminoren in Abhängigkeit von t.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(A_t) &= t \\ \mathrm{M}_2(A_t) &= 4t - 9 \\ \mathrm{M}_3(A_t) &= 12t - 6 - 6 - (16 + t + 27) = 11t - 55 \end{aligned}$$

Nun ist A_t positiv definit genau dann, wenn die folgenden drei Ungleichungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(A_t) &= t > 0 \\ \mathrm{M}_2(A_t) &= 4t - 9 > 0 \\ \mathrm{M}_3(A_t) &= 11t - 55 > 0 \end{aligned}$$

Dies gilt für $t > 5$.

Dagegen ist A_t negativ definit genau dann, wenn die folgenden drei Ungleichungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(A_t) &= t < 0 \\ \mathrm{M}_2(A_t) &= 4t - 9 > 0 \\ \mathrm{M}_3(A_t) &= 11t - 55 < 0. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Ungleichungen können aber bereits nicht gleichzeitig erfüllt sein. Also ist A_t für kein $t \in \mathbb{R}$ negativ definit.

Dies hätte man auch daran sehen können, dass $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \geqslant 0$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$.

(b) Es ist $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn entweder $\sin(\pi y) = 0$ oder $x^2 - y = 0$. Also ist die Nullstellenmenge die Vereinigung

$$\{\,(x, y) \in [-2, 2] \times [0, 2] \,:\, \sin(\pi y) = 0\,\} \cup \{\,(x, y) \in [-2, 2] \times [0, 2] \,:\, x^2 - y = 0\,\}.$$

Es hat f als Produkt von zwei Funktionen positiven Funktionswert, falls

$$\sin(\pi y) > 0 \text{ und } x^2 - y > 0$$

oder falls

$$\sin(\pi y) < 0 \text{ und } x^2 - y < 0.$$

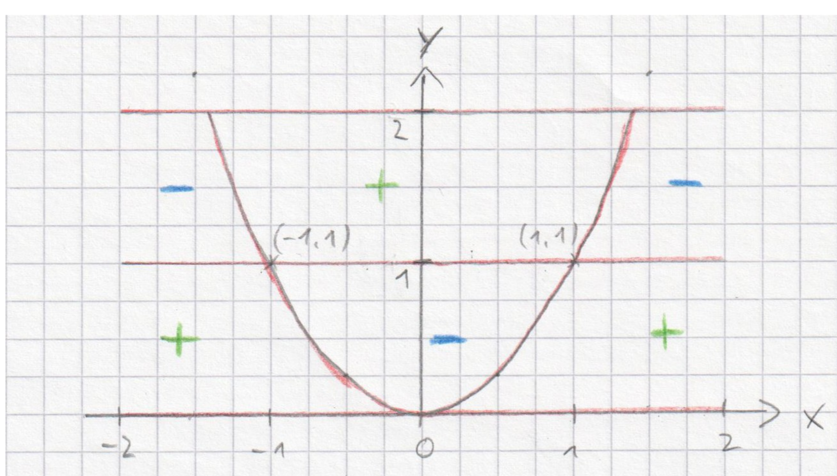
Entsprechend hat f negativen Funktionswert, falls

$$\sin(\pi y) > 0 \text{ und } x^2 - y < 0$$

oder falls

$$\sin(\pi y) < 0 \text{ und } x^2 - y > 0$$

Dies führt zu folgender Skizze. Dabei ist die Nullstellenmenge rot eingezeichnet. Die Bereiche, in denen f positiven oder negativen Funktionswert hat, sind durch diese Nullstellenmenge begrenzt.



Für beide Stellen $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ gilt nun jeweils folgendes.

Die Stelle ist eine Nullstelle von f. Anhand der Skizze sehen wir, dass in einer Umgebung von der Stelle sowohl positive als auch negative Funktionswerte liegen. Damit kann die Stelle weder eine lokale Maximalstelle noch eine lokale Minimalstelle sein.

Sie ist vielmehr eine Sattelstelle: Die Tangentialebene in diesem Punkt enthält die Nullstellenlinien und verläuft deshalb horizontal. Es liegt also eine Flachstelle vor. Aber kein lokales Extremum, wie eben gesehen.

Im Ergebnis sind also $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ keine lokalen Extremstellen.

Hausaufgabe 84 Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto (x - y)^2 + z(x - y)$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 2x^2+2y^2+z^2-8$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8,\ 4xy + z^2)$.

(a) Zeigen Sie: Es ist $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.
Ist $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$?

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f unter Nebenbedingung $h = 0$.

(c) Es ist $(1, -1, 2)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $h = 0$.
Ist $(1, -1, 2)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $h = 0$?

Lösung. Als Vorbereitung berechnen wir zunächst die Gradienten von f und g, sowie von h_1 und h_2.

$$\nabla_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x-y)+z \\ -2(x-y)-z \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$\nabla_g(x, y, z) = \nabla_{h_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{h_2}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4y \\ 4x \\ 2z \end{pmatrix}$$

Außerdem werden wir die Hessematrix von f, h_1 und h_2 benötigen.

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}_{h_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}_{h_2}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Damit $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist, müssen drei Bedingungen erfüllt sein.

(1) Es gilt $g(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 0$. Tatsächlich ist $g(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 - 8 = 0$.

(2) Die Matrix $N(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ mit einzelner Spalte $\nabla_g(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ hat Rang 1. In unserem Fall ist $N(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = \nabla_g(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ und hat damit Rang 1.

(3) Es gibt ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, das Lösung des Gleichungssystems

$$\nabla_f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = \lambda_1 \cdot \nabla_g(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

ist. Tatsächlich ist $\nabla_f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit ist $\lambda_1 = 0$ die gesuchte Lösung.

Es bleibt die Entscheidung, ob $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Zuerst bestimmen wir eine Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \; : \; \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} u = 0 \,\}$. Wir erhalten die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Diese fassen wir zu einer Matrix $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zusammen.

Als weitere Vorbereitung setzen wir noch

$$H := \mathrm{H}_f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) - \lambda_1 \cdot \mathrm{H}_g(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = \mathrm{H}_f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$

Damit bestimmen wir die zu untersuchende Matrix.

$$U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist indefinit. Also ist $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$.

(b) Wir suchen alle Lösungen des folgenden Lagrange-Gleichungssystems zur Nebenbedingung $h = 0$.

$$\begin{aligned} 2(x-y) + z &= \lambda_1 \cdot 4x + \lambda_2 \cdot 4y \\ -2(x-y) - z &= \lambda_1 \cdot 4y + \lambda_2 \cdot 4x \\ x - y &= \lambda_1 \cdot 2z + \lambda_2 \cdot 2z \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8 &= 0 \\ 4xy + z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Summe aus erster und zweiter Gleichung ergibt die Bedingung $4(\lambda_1 + \lambda_2)(x + y) = 0$.

Fall $\lambda_1 = -\lambda_2$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $x = y$. Dies liefert einen Widerspruch zur vierten und fünften Gleichung: $4y^2 + z^2 - 8 \neq 4y^2 + z^2$. Also erhalten wir keine Flachstellen aus diesem Fall.

Fall $x = -y$. Einsetzen in die fünfte Gleichung ergibt $z^2 = 4x^2$. Setzen wir dies in die vierte Gleichung ein, erhalten wir $2x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 8$, also $x^2 = 1$.

Dieser Fall liefert insgesamt die folgenden vier Kandidaten für Flachstellen unter Nebenbedingung $h = 0$.

$$(1, -1, 2), \qquad (1, -1, -2), \qquad (-1, 1, 2), \qquad (-1, 1, -2)$$

Diese Stellen setzen wir schließlich noch in die erste und dritte Gleichung ein, um λ_1 und λ_2 zu bestimmen. Wegen $x = -y$ ist die zweite Gleichung das Negative der ersten Gleichung.

Stelle $(1, -1, 2)$. Die dritte Gleichung liefert $2 = 4\lambda_1 + 4\lambda_2$, also $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \lambda_2$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $6 = 2 - 4\lambda_2 - 4\lambda_2$. Wir erhalten $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ und $\lambda_1 = 1$. Weiterhin hat $N(1, -1, 2) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ Rang 2.

Eine analoge Rechnung zeigt, dass die Matrix N an allen Stellen Rang 2 hat, und bestimmt jeweils λ_1 und λ_2.

$$\begin{aligned}
N(1, -1, -2) &= \left(\begin{smallmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \\ -4 & -4 \end{smallmatrix}\right) &&\text{und} \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}, &&\text{wenn } (x, y, z) = (1, -1, -2) \\
N(-1, 1, 2) &= \left(\begin{smallmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right) &&\text{und} \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}, &&\text{wenn } (x, y, z) = (-1, 1, 2) \\
N(-1, 1, -2) &= \left(\begin{smallmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \\ -4 & -4 \end{smallmatrix}\right) &&\text{und} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}, &&\text{wenn } (x, y, z) = (-1, 1, -2)
\end{aligned}$$

Also sind alle vier Stellen auch tatsächlich Flachstellen.

Bemerkung. Die Flachstelle $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ unter Nebenbedingung $g = 0$ aus Teil (a) ist also keine Flachstelle unter Nebenbedingung $h = 0$, obwohl $h_1 = g$.

Aus obiger Rechnung sieht man auch, dass $(1, -1, 2)$ keine Flachstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ sein kann, da sonst $\lambda_2 = 0$ sein müsste.

Man kann also aus den Flachstellen unter Nebenbedingung $g = 0$ keine Rückschlüsse auf die Flachstellen unter Nebenbedingungen $h = 0$ ziehen. Umgekehrt genausowenig.

(c) Wir schreiben $N(1, -1, 2) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Aus Teil (b) wissen wir, dass $\lambda = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$ die Gleichung $\nabla_f(1, -1, 2) = N(1, -1, 2) \cdot \lambda$ löst.

Zuerst bestimmen wir eine Basis des Lösungsraums $\{\, u \in \mathbb{R}^{3\times 1} \ : \ \left(\begin{smallmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \end{smallmatrix}\right) u = 0 \,\}$. Wir erhalten die Basis $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$. Diese schreiben wir als Matrix $U := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Als weitere Vorbereitung setzen wir noch

$$\begin{aligned}
H :&= \mathrm{H}_f(1, -1, 2) - \lambda_1 \cdot \mathrm{H}_{h_1}(1, -1, 2) - \lambda_2 \cdot \mathrm{H}_{h_2}(1, -1, 2) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit bestimmen wir die zu untersuchende Matrix.

$$U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist negativ definit. Also ist $(1, -1, 2)$ eine lokale Maximalstelle unter Nebenbedingung $h = 0$.