Mathematatik 2 für inf, swt, msv

Lösung 22

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 85

(a) Bestätigen Sie, dass

$$y(x) = a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist.

$$y'' - \frac{y'}{x} - x^2 y \ = \ 0$$

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen $y(\sqrt{2}) = 1$ und $y'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung dieser Differentialgleichung, die $y(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ und $y(2) = \mathrm{e}$ erfüllt.

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= x(a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}) \\ y''(x) &= x^2(a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}) + a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} y''(x) - \frac{y'(x)}{x} - x^2 y(x) &= x^2(a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}) + a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\quad -(a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}) - x^2(a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

(b) Die Anfangsbedingungen ergeben das folgende $\mathbb{R}$-lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} y(\sqrt{2}) &= a\mathrm{e} + b\mathrm{e}^{-1} &\overset{!}{=}\ 1 \\ y'(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}(a\mathrm{e} - b\mathrm{e}^{-1}) &\overset{!}{=}\ 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e} & \mathrm{e}^{-1} & 1 \\ \mathrm{e} & -\mathrm{e}^{-1} & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e} & \mathrm{e}^{-1} & 1 \\ 0 & -2\mathrm{e}^{-1} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e} & \mathrm{e}^{-1} & 1 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & -1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e} & 0 & 3/2 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & -1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3\mathrm{e}^{-1}/2 \\ 0 & 1 & -\mathrm{e}/2 \end{array}\right)$$

Damit ist $a = \frac{3\mathrm{e}^{-1}}{2}$ und $b = -\frac{\mathrm{e}}{2}$.
Insgesamt ist also

$$y(x) = \frac{3\mathrm{e}^{-1}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - \frac{\mathrm{e}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x^2}$$

eine Lösung der Differentialgleichung zu den gestellten Anfangsbedingungen.

(c) Die gestellten Bedingungen ergeben das folgende $\mathbb{R}$-lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} y(1) &= a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + b\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \overset{!}{=} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \\ y(2) &= a\mathrm{e}^{2} + b\mathrm{e}^{-2} \overset{!}{=} \mathrm{e} \end{aligned}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathrm{e}^{2} & \mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^{2} & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ \mathrm{e}^{2} & \mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{e}^{2} & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e} & 0 \end{array}\right)$$

Bereits hier erkennen wir $b = 0$ und $a = \mathrm{e}^{-1}$.

Insgesamt ist also

$$y(x) = \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$$

eine Lösung der Differentialgleichung, die $y(\sqrt{2}) = 1$ und $y'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ erfüllt.

Hausaufgabe 86 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = y\ln(x)$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

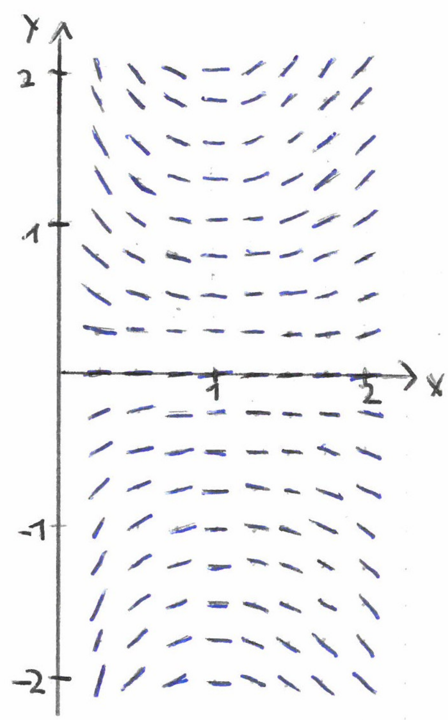
(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld im Bereich $(x, y) \in \,]0, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$.

Lösung.

(a) Die folgende Skizze zeigt das Richtungsfeld von $y' = y\ln(x)$ im Bereich $(x, y) \in \,]0, 2] \times [-2, 2]$.



(b) Wir stellen zunächst fest, dass die konstante Funktion $y(x) = 0$ eine Lösung ist.

Sei $y \neq 0$. Dann ist die Differentialgleichung äquivalent zu $\dfrac{y'}{y} = \ln(x)$.

Wir haben also die Gleichung

$$\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

zu lösen.

Einerseits ist

$$\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = [\ln(|y|)]\,.$$

Andererseits ist

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)] - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]\,.$$

Damit ist

$$\ln(|y|) = x\ln(x) - x + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Also ist $|y| = \exp(x\ln(x) - x + c)$.

Dies ergibt $y = \exp(c) \cdot \exp(x\ln(x) - x)$ oder $y = (-\exp(c)) \cdot \exp(x\ln(x) - x)$.

Es können $\exp(c)$ oder $-\exp(c)$ jeden Wert $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen. Somit wird

$$y = y(x) = d\exp(x\ln(x) - x)$$

für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die oben gefundene konstante Lösung $y(x) = 0$ erhalten wir für $d = 0$.

Damit sind also alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y = y(x) = d\exp(x\ln(x) - x)$$

mit $d \in \mathbb{R}$.

Wir machen eine Probe.

$$y'(x) = d\exp(x\ln(x) - x) \cdot (\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1) = y(x)\ln(x)$$

Also ist überprüft, dass $y(x) = d\exp(x\ln(x) - x)$ für $d \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

(c) Die Anfangsbedingung führt auf folgende Gleichung.

$$y(1) \;=\; d\exp(1\ln(1) - 1) \;=\; d\mathrm{e}^{-1} \overset{!}{=} -2$$

Damit ist $d = -2\mathrm{e}$.

Insgesamt ist

$$y(x) = -2\mathrm{e} \cdot \exp(x\ln(x) - x) = -2\exp(x\ln(x) - x + 1)$$

eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = -2$.

Unsere Rechnung zeigt auch, dass dies die einzige Lösung der Differentialgleichung zur gestellten Anfangsbedingung ist.

Hausaufgabe 87

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -1 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$ mit Anfangsbedingung $y(1) = 3$.

Lösung. Wir substituieren $y(x) = u(x) \cdot x$ und erhalten wegen $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$, also $y' = u'x + u$, die folgende Differerentialgleichung für u.

$$u'x + u \; = \; -1 + u + u^2 \, .$$

Das stellen wir um zu

$$u' \; = \; \frac{u^2 - 1}{x} \, .$$

Wir erkennen die konstanten Lösungen $u(x) = -1$ und $u(x) = 1$.
Wir stellen weiter um.

$$\frac{u'}{1 - u^2} \; = \; \frac{1}{x} \, .$$

Wir haben also die Gleichung

$$\int \frac{u'}{(u+1)(u-1)} \, \mathrm{d}x \; = \; \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

zu lösen.
Einerseits ist

$$\begin{aligned} \int \frac{u'}{(u+1)(u-1)} \, \mathrm{d}x \; &= \; \int \frac{1}{(u+1)(u-1)} \, \mathrm{d}u \; = \; \int \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1} \, \mathrm{d}u \\ &= \; \left[\frac{1}{2} \ln(|u-1|) - \frac{1}{2} \ln(|u+1|) \right] \; = \; \left[\frac{1}{2} \ln\left(\left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \right] . \end{aligned}$$

Andererseits ist $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \; = \; [\ln(|x|)]$.
Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln\left(\left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \; &= \; \ln(|x|) + c \\ \iff \quad \ln\left(\left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \; &= \; \ln(x^2) + 2c \\ \iff \quad \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \; &= \; x^2 \exp(2c) \end{aligned}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Dies ergibt $\displaystyle\frac{u-1}{u+1} \; = \; x^2 \exp(2c)$ oder $\displaystyle\frac{u-1}{u+1} \; = \; x^2(-\exp(2c))$.

Es können $\exp(2c)$ oder $-\exp(2c)$ jeden Wert $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen.

Somit wird $\dfrac{u-1}{u+1} = dx^2$ für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{u-1}{u+1} &= dx^2 \\ \iff\quad 1 - \frac{2}{u+1} &= dx^2 \\ \iff\quad 1 - dx^2 &= \frac{2}{u+1} \\ \iff\quad \frac{2}{1-dx^2} &= u+1 \\ \iff\quad u &= \frac{2}{1-dx^2} - 1\,. \end{aligned}$$

Für $d = 0$ erhalten wir die konstante Lösung $u(x) = 1$.
Also sind alle Lösungen der transformierten Differentialgleichung $u' = \frac{u^2-1}{x}$ von der Form

$$u(x) = -1 \quad \text{oder} \quad u(x) = \frac{2}{1-dx^2} - 1 \ \ \text{mit } d \in \mathbb{R}\,.$$

Damit sind alle Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung $y' = -1 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$ von der Form

$$y(x) = -x \quad \text{oder} \quad y(x) = \frac{2x}{1-dx^2} - x \ \ \text{mit } d \in \mathbb{R}\,.$$

Wir machen eine Probe für $y(x) = -x$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -1 \\ -1 + \frac{y(x)}{x} + \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 &= -1 - \frac{x}{x} + \frac{x^2}{x^2} = -1 \end{aligned}$$

Also ist $y(x) = -x$ eine Lösung.

Wir machen eine Probe für $y(x) = \dfrac{2x}{1-dx^2} - x = \dfrac{x+dx^3}{1-dx^2}$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -1 + \frac{2(1-dx^2) - 2x(-2dx)}{(1-dx^2)^2} \\ &= -1 + 2\frac{(1+dx^2)}{(1-dx^2)^2} \\ -1 + \frac{y(x)}{x} + \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 &= -1 + \frac{1+dx^2}{1-dx^2} + \frac{(1+dx^2)^2}{(1-dx^2)^2} \\ &= -1 + \frac{(1+dx^2)(1-dx^2+1+dx^2)}{(1-dx^2)^2} \\ &= -1 + 2\frac{(1+dx^2)}{(1-dx^2)^2} \end{aligned}$$

Also ist $y(x) = \dfrac{2x}{1-dx^2} - x$ für $d \in \mathbb{R}$ eine Lösung.
Nun bestimmen wir eine Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = 3$.
Für $y(x) = -x$ ist $y(1) = -1$. Also ist die gesuchte Lösung von der Form $y(x) = \dfrac{2x}{1-dx^2} - x$.
Die Anfangsbedingung führt auf folgende Gleichung.

$$y(1) \;=\; \frac{2}{1-d} - 1 \overset{!}{=} 3$$

Insbesondere ist $d \neq 1$. Es ist

$$\frac{2}{1-d} - 1 \;=\; 3 \quad\iff\quad \frac{1-d}{2} \;=\; \frac{1}{4} \quad\iff\quad 1-d \;=\; \frac{1}{2} \quad\iff\quad d \;=\; \frac{1}{2}.$$

Insgesamt ist also

$$y(x) \;=\; \frac{2x}{1-\frac{1}{2}x^2} - x \;=\; \frac{x+\frac{1}{2}x^3}{1-\frac{1}{2}x^2} \;=\; \frac{2x+x^3}{2-x^2}$$

eine Lösung von $y' = -1 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$ zur Anfangsbedingung $y(1) = 3$.

Unsere Rechnung zeigt auch, dass dies die einzige Lösung der Differentialgleichung zur gestellten Anfangsbedingung ist.

Hausaufgabe 88

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = 3x^2 y$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = 3x^2 y + \mathrm{e}^{x^3}$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = 3x^2 y + x\mathrm{e}^{x^3}$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = 3x^2 y + x\mathrm{e}^{x^3 - \frac{1}{2}x^2}$.

Lösung.

(a) Es hat $y' = 3x^2 y$ die konstante Lösung $y(x) = 0$.

Für $y \neq 0$ ist die Differentialgleichung äquivalent zu $\dfrac{y'}{y} \;=\; 3x^2$.

Wir haben also die Gleichung

$$\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x \;\overset{!}{=}\; \int 3x^2\,\mathrm{d}x \;=\; [x^3]$$

zu lösen. Es ist $\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \;=\; [\ln(|y|)]$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \ln(|y|) \;&=\; x^3 + c \\ \iff \qquad |y| \;&=\; \exp(x^3 + c) \end{aligned}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Dies ergibt $y = \exp(c) \cdot \exp(x^3)$ oder $y = (-\exp(c)) \cdot \exp(x^3)$.

Es können $\exp(c)$ oder $-\exp(c)$ jeden Wert $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen. Somit wird

$$y = y(x) = d\exp(x^3)$$

für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Für $d = 0$ erhalten wir die konstante Lösung $y(x) = 0$.

Insgesamt sind also alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = d\exp(x^3)$$

mit $d \in \mathbb{R}$.

Wir machen eine Probe.

$$y'(x) \;=\; d\exp(x^3) \cdot 3x^2 \;=\; 3x^2 y(x)$$

Also ist $y(x) = d\exp(x^3)$ für $d \in \mathbb{R}$ als Lösung bestätigt.

(b) Es ist $\exp(x^3) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Damit ist jede Lösung von der Form $y(x) = c(x)\exp(x^3)$. Wir machen den Ansatz $y(x) = c(x)\exp(x^3)$ und haben folgende Gleichung zu lösen.

$$\begin{array}{lrcl} & y'(x) & = & 3x^2 y(x) + \exp(x^3) \\ \Longleftrightarrow & c'(x)\exp(x^3) + c(x)\exp(x^3) \cdot 3x^2 & = & 3x^2 c(x)\exp(x^3) + \exp(x^3) \\ \Longleftrightarrow & c'(x)\exp(x^3) & = & \exp(x^3) \\ \Longleftrightarrow & c'(x) & = & 1 \\ \Longleftrightarrow & c(x) & = & [x] \end{array}$$

Damit ist $c(x) = x + d$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Insgesamt sind also alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(x) \;=\; (x + d)\exp(x^3)$$

mit $d \in \mathbb{R}$.

Wir machen eine Probe.

$$y'(x) \;=\; \exp(x^3) + (x + d)\exp(x^3) \cdot 3x^2 \;=\; 3x^2 y(x) + \exp(x^3)$$

Also ist $y(x) = (x + d)\exp(x^3)$ für $d \in \mathbb{R}$ als Lösung bestätigt.

(c) Es ist $\exp(x^3) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Damit ist jede Lösung von der Form $y(x) = c(x)\exp(x^3)$. Wir machen den Ansatz $y(x) = c(x)\exp(x^3)$ und haben folgende Gleichung zu lösen.

$$\begin{array}{lrcl} & y'(x) & = & 3x^2 y(x) + x\exp(x^3) \\ \Longleftrightarrow & c'(x)\exp(x^3) + c(x)\exp(x^3) \cdot 3x^2 & = & 3x^2 c(x)\exp(x^3) + x\exp(x^3) \\ \Longleftrightarrow & c'(x)\exp(x^3) & = & x\exp(x^3) \\ \Longleftrightarrow & c'(x) & = & x \\ \Longleftrightarrow & c(x) & = & \left[\dfrac{x^2}{2}\right] \end{array}$$

Damit ist $c(x) = \frac{x^2}{2} + d$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Insgesamt sind also alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + d\right) \exp(x^3)$$

mit $d \in \mathbb{R}$.

Wir machen eine Probe.

$$y'(x) = x \exp(x^3) + \left(\frac{x^2}{2} + d\right) \exp(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 y(x) + x \exp(x^3)$$

Also ist $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + d\right) \exp(x^3)$ für $d \in \mathbb{R}$ als Lösung bestätigt.

(d) Es ist $\exp(x^3) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Damit ist jede Lösung von der Form $y(x) = c(x) \exp(x^3)$.

Wir machen den Ansatz $y(x) = c(x) \exp(x^3)$ und haben folgende Gleichung zu lösen.

$$\begin{array}{rrcl} & y'(x) & = & 3x^2 y(x) + x \exp(x^3 - \frac{1}{2}x^2) \\ \iff & c'(x) \exp(x^3) + c(x) \exp(x^3) \cdot 3x^2 & = & 3x^2 c(x) \exp(x^3) + x \exp(x^3 - \frac{1}{2}x^2) \\ \iff & c'(x) \exp(x^3) & = & x \exp(x^3 - \frac{1}{2}x^2)) \\ \iff & c'(x) & = & x \exp(-\frac{1}{2}x^2) \end{array}$$

Es ist

$$\int x \exp(-\tfrac{1}{2}x^2)\,\mathrm{d}x = \int \exp(-\tfrac{1}{2}x^2)(\tfrac{1}{2}x^2)'\,\mathrm{d}x = \int \exp(-u)\,\mathrm{d}u = [-\exp(-u)] = [-\exp(-\tfrac{x^2}{2})]\,.$$

Also ist $c(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2}) + d$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Insgesamt sind also alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = \left(-\exp(-\tfrac{x^2}{2}) + d\right) \exp(x^3)$$

mit $d \in \mathbb{R}$.

Wir machen eine Probe.

$$y'(x) = x \exp(-\tfrac{x^2}{2}) \exp(x^3) + \left(-\exp(-\tfrac{x^2}{2}) + d\right) \exp(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 y(x) + x \exp(x^3 - \tfrac{x^2}{2})$$

Also ist

$$y(x) = \left(-\exp(-\tfrac{x^2}{2}) + d\right) \exp(x^3)$$

für $d \in \mathbb{R}$ als Lösung bestätigt.