Künzer, Nitsche, Ritter

Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 23

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 89 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = -\dfrac{xy}{1+x^2}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$. Probe!

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $-\frac{x}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie $\max\{\,|-\frac{x}{1+x^2}|\,:\,x\in\mathbb{R}\,\}$.

(c) Sei $y(x)$ die Lösung zum Anfangswert $y(\sqrt{\frac{1}{2}}\,) = 1$.
Sei $\tilde{y}(x)$ die Lösung zum Anfangswert $\tilde{y}(\sqrt{\frac{1}{2}}\,) = 0$.
Bestimmen Sie ein $L \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \mathrm{e}^{L|x-\sqrt{\frac{1}{2}}\,|}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) Die Differentialgleichung ist separierbar. Daher muss gelten

$$[\ln(|y|)] = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Substitution $u(x) := 1 + x^2$ liefert für das letzte Integral

$$\int -\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}[\ln(|u|)] = -\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)] = [\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)].$$

Wir erhalten die Bedingung $|y| = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+c} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot \mathrm{e}^c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Also $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\mathrm{e}^c$ oder $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(-\mathrm{e}^c)$, wobei e^c jeden Wert in $\mathbb{R}_{>0}$ annehmen kann.

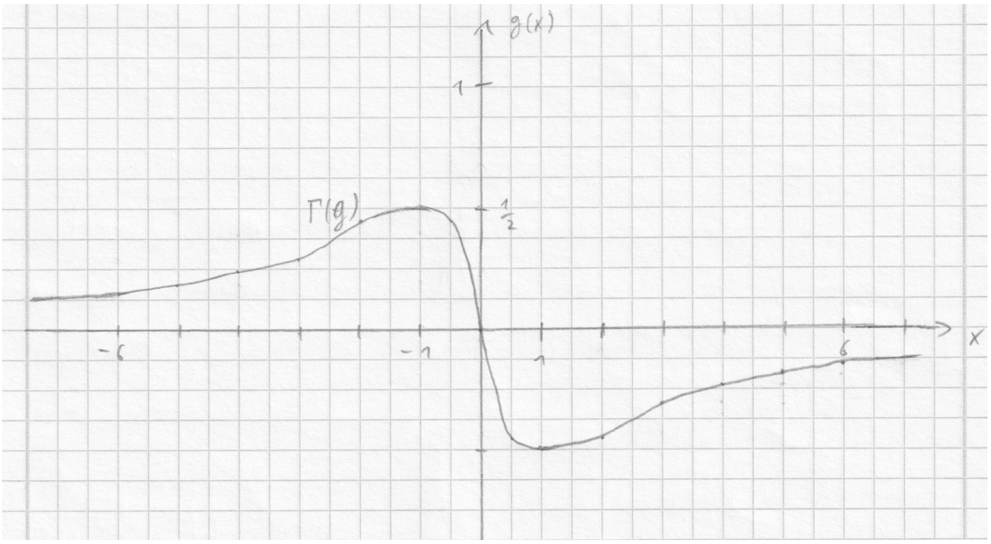
Da die Differentialgleichung auch für $y(x) = 0$ erfüllt ist, sind damit alle Lösungen gegeben durch

$$y(x) = \frac{d}{\sqrt{1+x^2}}$$

für $d \in \mathbb{R}$. Eine Probe bestätigt, dass dies auch alles tatsächlich Lösungen der gegebenen Differentialgleichung sind.

$$y'(x) = -\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = -\frac{xy}{1+x^2}$$

(b) Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\dfrac{x}{1+x^2}$.



Wegen $g(-x) = -g(x)$ ist die Funktion punktsymmetrisch, und daher ist

$$\max\{\, |-\frac{x}{1+x^2}| \;:\; x \in \mathbb{R}\,\} = \max\{\, -\frac{x}{1+x^2} \;:\; x \in \mathbb{R}\,\} = \max\{\, g(x) \;:\; x \in \mathbb{R}\,\}.$$

Gesucht ist also das globale Maximum von g. Ein lokales Maximum reicht in diesem Fall nicht aus.

Um Kandidaten für das globale Maximum zu finden, bestimmen wir zuerst die Flachstellen von g.

$$g'(x) = -\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 1$$

Anhand der Skizze sehen wir, dass es sich bei $x = -1$ um eine lokale Maximalstelle mit Funktionswert $g(-1) = \frac{1}{2}$ handelt.

Wir zeigen, dass dieser Funktionswert auch das globale Maximum von g ist.

$$\begin{aligned} g(x) \le \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -2x \le 1 + x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \le 1 + 2x + x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \le (1+x)^2 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist wahr für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist $\max\{\, g(x) \;:\; x \in \mathbb{R}\,\} = \frac{1}{2}$.

(c) Es ist $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(-\frac{xy}{1+x^2})| = |g(x)| \le \frac{1}{2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nach Teil (b). Das zweite Lemma in Kapitel 6.3 liefert uns daher die folgende Abschätzung für $x \in \mathbb{R}$ mit $L := \frac{1}{2}$.

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \le \Big| y(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,) - \tilde{y}(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,) \Big| \, \mathrm{e}^{L|x - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|}$$

Wegen $y(\sqrt{\frac{1}{2}}\,) = 1$ und $\tilde{y}(\sqrt{\frac{1}{2}}\,) = 0$ ist dies die gesuchte Ungleichung.

Hausaufgabe 90 Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} y$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_{>0}$. Probe!

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem.

Gibt es ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$, für welches die Wronski-Determinante dieses Fundamentalsystems gleich 0 ist?

(c) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung.

(a) Wir betrachten zuerst die dritte Gleichung, welche separierbar ist.

$$y_3' = \frac{y_3}{x}$$

Wir erhalten $[\ln(|y_3|)] = \int \frac{1}{y_3}\,\mathrm{d}y_3 = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x|)] = [\ln(x)]$, unter Beachtung von $x > 0$, und damit $|y_3| = x \cdot \mathrm{e}^{c_3}$ für ein $c_3 \in \mathbb{R}$.

Also ist $y_3 = x \cdot \mathrm{e}^{c_3}$ oder $y_3 = x \cdot (-\mathrm{e}^{c_3})$, wobei e^{c_3} jeden Wert in $\mathbb{R}_{>0}$ annehmen kann.

Da die Differentialgleichung auch für $y_3(x) = 0$ erfüllt ist, sind damit alle Lösungen gegeben durch

$$y_3(x) = d_3 x$$

für $d_3 \in \mathbb{R}$.

Wir setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$y_2' = \frac{y_2}{x} + \frac{y_3}{x^2} = \frac{y_2}{x} + \frac{d_3}{x}\,.$$

Als Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_2' = \frac{y_2}{x}$ erhalten wir wie eben $y_2 = c_2 x$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten, also $y_2(x) = c_2(x) \cdot x$. Aus $c_2(x) + c_2'(x)x = y_2'(x) = \frac{y_2}{x} + \frac{d_3}{x} = \frac{c_2(x)x}{x} + \frac{d_3}{x}$ folgt

$$c_2'(x) = \frac{d_3}{x^2}\,.$$

Also $c_2(x) = -\frac{d_3}{x} + d_2$ für ein $d_2 \in \mathbb{R}$. Dies ergibt

$$y_2(x) = \left(-\frac{d_3}{x} + d_2\right) x = d_2 x - d_3.$$

Wir setzen y_3 in die erste Gleichung ein und erhalten

$$y_1' = \frac{y_1}{x} + d_3 x.$$

Als Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_1' = \frac{y_1}{x}$ erhalten wir wie eben $y_1 = c_1 x$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten, also $y_1(x) = c_1(x) \cdot x$. Aus $c_1(x) + c_1'(x)x = y_1'(x) = \frac{y_1}{x} + d_3 x = \frac{c_1(x)x}{x} + d_3 x$ folgt

$$c_1'(x) = d_3\,.$$

Also ist $c_1(x) = d_3 x + d_1$ für ein $d_1 \in \mathbb{R}$. Dies ergibt

$$y_1(x) = (d_3 x + d_1)\, x = d_1 x + d_3 x^2.$$

Insgesamt erhalten wir

$$y(x) = \begin{pmatrix} d_1 x + d_3 x^2 \\ d_2 x - d_3 \\ d_3 x \end{pmatrix}$$

als allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems. Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

$$y'(x) = \begin{pmatrix} d_1 + 2d_3 x \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 x + d_3 x^2 \\ d_2 x - d_3 \\ d_3 x \end{pmatrix}$$

(b) Gesucht ist ein Tupel aus drei Lösungsvektoren. Dazu setzen wir jeweils eine der Konstanten in der allgemeinen Lösung auf 1 und die anderen auf 0. Wir erhalten

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix} \right).$$

Um zu überprüfen, ob dieses Tupel ein Fundamentalsystem ist, berechnen wir seine Wronski-Determinante.

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^3$$

Diese ist ungleich Null für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Also ist das genannte Tupel ein Fundamentalsystem.

(c) Wir verwenden das Fundamentalsystem aus Teil (b).

Gesucht sind also Konstanten $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

ergibt die gesuchte Lösung

$$y(x) = (-1)\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - x \\ 3x - 2 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 91 Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} (1+x)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (2-x)^{-1} & 0 \\ 1 & 2-x & x^{-1} \end{pmatrix} y$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf $]0, 2[$. Probe!

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Wir betrachten zunächst die erste Gleichung, welche separierbar ist.

$$y_1' = \frac{y_1}{1+x}$$

Wir erhalten $[\ln(|y_1|)] = \int \frac{1}{y_1}\,\mathrm{d}y_1 = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(|1+x|)] = [\ln(1+x)]$, unter Beachtung von $1 + x > 0$. Das ergibt $|y_1| = (1 + x) \cdot \mathrm{e}^{c_1}$ für ein $c_1 \in \mathbb{R}$.

Also ist $y_1 = (1+x) \cdot \mathrm{e}^{c_1}$ oder $y_1 = (1+x) \cdot (-\mathrm{e}^{c_1})$, wobei e^{c_1} jeden Wert in $\mathbb{R}_{>0}$ annehmen kann.

Da die Differentialgleichung auch für $y_1(x) = 0$ erfüllt ist, sind damit alle Lösungen gegeben durch

$$y_1(x) = d_1(1 + x)\ ,$$

wobei $d_1 \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten als nächstes die zweite Gleichung. Diese ist ebenfalls separierbar.

$$y_2' = \frac{y_2}{2-x}$$

Wir erhalten $[\ln(|y_2|)] = \int \frac{1}{y_2}\,\mathrm{d}y_2 = \int \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x = [-\ln(|2-x|)] = [\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)]$, unter Beachtung von $2 - x > 0$. Dies ergibt $|y_1| = \frac{1}{2-x} \cdot \mathrm{e}^{c_2}$ für ein $c_2 \in \mathbb{R}$.

Also ist $y_2 = \frac{1}{2-x} \cdot \mathrm{e}^{c_2}$ oder $y_2 = \frac{1}{2-x} \cdot (-\mathrm{e}^{c_2})$, wobei e^{c_2} jeden Wert in $\mathbb{R}_{>0}$ annehmen kann.

Da die Differentialgleichung auch für $y_2(x) = 0$ erfüllt ist, sind damit alle Lösungen gegeben durch

$$y_2(x) = \frac{d_2}{2-x}\ ,$$

wobei $d_2 \in \mathbb{R}$.

Wir setzen die beiden bisherigen Lösugen in die dritte Gleichung ein.

$$y_3' = \frac{y_3}{x} + (2 - x)y_2 + y_1 = \frac{y_3}{x} + d_2 + d_1(1 + x)$$

Als Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_3' = \frac{y_3}{x}$ erhalten wir, analog zu y_1 oben, $y_3 = c_3 x$ mit $c_3 \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten, $y_3(x) = c_3(x) \cdot x$. Aus

$$c_3(x) + c_3'(x)x = y_3'(x) = \frac{c_3(x)x}{x} + d_2 + d_1(1+x)$$

folgt

$$c_3'(x) = \frac{d_2 + d_1(1+x)}{x} = \frac{d_1 + d_2}{x} + d_1.$$

Also ist $c_3(x) = (d_1 + d_2)\ln(|x|) + d_1 x + d_3 = (d_1 + d_2)\ln(x) + d_1 x + d_3$ für ein $d_3 \in \mathbb{R}$, man beachte dazu $x > 0$. Wir erhalten

$$y_3(x) = ((d_1 + d_2)\ln(x) + d_1 x + d_3)\, x.$$

Insgesamt sind damit alle Lösungen des Differentialgleichungssystems auf $]0,2[$ gegeben durch

$$y(x) = \begin{pmatrix} d_1(1+x) \\ \frac{d_2}{2-x} \\ ((d_1+d_2)\ln(x) + d_1 x + d_3)\, x \end{pmatrix}.$$

Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \begin{pmatrix} d_1 \\ \frac{d_2}{(2-x)^2} \\ (d_1+d_2)\ln(x) + d_1 x + d_3 + \left(\frac{d_1+d_2}{x} + d_1\right) x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 \\ \frac{d_2}{(2-x)^2} \\ d_1(1+x) + d_2 + (d_1+d_2)\ln(x) + d_1 x + d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+x)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (2-x)^{-1} & 0 \\ 1 & 2-x & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1(1+x) \\ \frac{d_2}{2-x} \\ ((d_1+d_2)\ln(x) + d_1 x + d_3)\, x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Zu lösen ist die Gleichung

$$y(1) = \begin{pmatrix} d_1(1+1) \\ \frac{d_2}{2-1} \\ ((d_1+d_2)\ln(1) + d_1 \cdot 1 + d_3)\, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 \\ d_2 \\ d_1 + d_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir können direkt $d_1 = 1$ und $d_2 = 4$ ablesen. Damit ergibt sich $d_3 = -3$ aus der dritten Gleichung.

Als Lösung zur gegebenen Anfangsbedingung erhalten wir also

$$y(x) = \begin{pmatrix} 1+x \\ \frac{4}{2-x} \\ (5\ln(x) + x - 3)\, x \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 92 Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} y$.

(a) Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist das folgende Tupel ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem?

$$\left(\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Damit das gegebene Tupel ein Fundamentalsystem ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein.

(1) Jeder Vektor des Tupels ist eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(2) Für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass die Wronski-Determinante des Tupels ungleich Null ist.

$$\mathrm{w}(x) = \det \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{2x} & 0 & -\mathrm{e}^{-4x} & 0 \\ \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{-4x} & -\mathrm{e}^{-4x} \\ \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{-4x} \\ \mathrm{e}^{2x} & 3\mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{-4x} & b\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir stellen also zuerst sicher, dass alle Vektoren Lösungen der Differentialgleichung sind. Für den ersten Vektor ergibt sich damit die Bedingung

$$\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 4 \\ 2a-2 \\ 2a-2 \\ 2a-2 \end{pmatrix}.$$

Es muss also $a = 2$ sein, damit dieser Vektor eine Lösung ist.

Eine direkte Rechnung ergibt, dass die anderen drei Vektoren für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung sind:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ -4b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-4x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher untersuchen wir, für welche $b \in \mathbb{R}$ die Wronski-Determinante für ein $x \in \mathbb{R}$ ungleich Null ist. Wir untersuchen die Determinante an der Stelle $x = 0$, da an dieser Stelle die Rechnung am kürzesten wird.

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}(0) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & b \end{pmatrix} \\
&= (-1) \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & b \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & b+3 \end{pmatrix} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & b+3 \end{pmatrix} \\
&= 6(b+3) \overset{!}{\neq} 0
\end{aligned}$$

Das gegebene Tupel ist also ein Fundamentalsystem für $a = 2$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

(b) Wir wollen eines der Fundamentalsysteme aus Teil (a) benutzen. Es ist $a = 2$. Wir können beliebig $b \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ wählen, und wir wählen $b = 0$.

Wir erhalten so folgendes Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

$$\left(\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Gesucht sind damit Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{9}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -9 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung zu der gegebenen Anfangsbedingung ist daher

$$y(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$