Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 24

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 93 Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Wir berechnen $\exp(Ax)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zunächst bringen wir A in Jordansche Normalform.

Wir erhalten das charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{E}_4) = (X-3)(X-4)(X+1)(X-2)\,.$$

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$, und $\lambda_4 = 2$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

Somit ist A diagonalisierbar, d.h. die Jordansche Normalform von A ist eine Diagonalmatrix.

Zu $\lambda_1 = 3$. Wir formen um: $A - 3\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(3) = \mathrm{Kern}(A - 3\mathrm{E}_3)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_2 = 4$. Wir formen um: $A - 4\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(4) = \mathrm{Kern}(A - 4\mathrm{E}_3)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_3 = -1$. Wir formen um: $A + \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + \mathrm{E}_3)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, oder aber auch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Zu $\lambda_4 = 2$. Wir formen um: $A - 2\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also hat $\mathrm{E}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + \mathrm{E}_3)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Mit der invertierbaren Matrix $S := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird also $D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen S^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&0&0&1&0&1&-1\\ 0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-2&-1&-1\\ 0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

Also ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1&-2&-1&-1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

Damit wird

$$\begin{aligned} \exp(Ax) &= S\exp(Dx)S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1&2&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x}&0&0&0\\ 0&e^{4x}&0&0\\ 0&0&e^{-x}&0\\ 0&0&0&e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&-2&-1&-1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3x}&2e^{4x}&e^{-x}&e^{2x}\\ 0&e^{4x}&e^{-x}&0\\ 0&0&-e^{-x}&0\\ 0&0&0&e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&-2&-1&-1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3x}&2e^{4x}-2e^{3x}&-e^{3x}+2e^{4x}-e^{-x}&-e^{3x}+e^{2x}\\ 0&e^{4x}&e^{4x}-e^{-x}&0\\ 0&0&e^{-x}&0\\ 0&0&0&e^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\begin{pmatrix} e^{3x}\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^{4x}-2e^{3x}\\ e^{4x}\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{3x}+2e^{4x}-e^{-x}\\ e^{4x}-e^{-x}\\ e^{-x}\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{3x}+e^{2x}\\0\\0\\e^{2x} \end{pmatrix}\right)$$

ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

> Da S reelle Einträge hat, enthält alternativ auch $S\exp(Dx)$ in den Spalten ein Fundamentalsystem.

(b) Wir machen den Ansatz

$$y(x) = a\begin{pmatrix} e^{3x}\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2e^{4x}-2e^{3x}\\ e^{4x}\\0\\0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -e^{3x}+2e^{4x}-e^{-x}\\ e^{4x}-e^{-x}\\ e^{-x}\\0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -e^{3x}+e^{2x}\\0\\0\\e^{2x} \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Die Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$ führt auf folgendes $\mathbb{R}$-lineare Gleichungssystem.

$$y(1) = a\begin{pmatrix} e^{3}\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2e^{4}-2e^{3}\\ e^{4}\\0\\0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -e^{3}+2e^{4}-e^{-1}\\ e^{4}-e^{-1}\\ e^{-1}\\0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -e^{3}+e^{2}\\0\\0\\e^{2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

Damit wird zunächst $d = e^{-2}$, $c = 0$ und $b = 0$. Ferner wird

$$ae^3 + e^{-2}(e^2 - e^3) = 1.$$

Also ist $a = e^{-2}$. Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2}\begin{pmatrix} e^{3x}\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + e^{-2}\begin{pmatrix} -e^{3x}+e^{2x}\\0\\0\\e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3x-2}-e^{3x-2}+e^{2(x-1)}\\0\\0\\e^{2(x-1)} \end{pmatrix} \\ &= e^{2(x-1)}\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 94 Sei $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Sei $\chi_A(X) = -(X-4)^3$ bereits bekannt.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Wir berechnen $\exp(Ax)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dazu bringen wir A in Jordansche Normalform.

Da $\chi_A(X) = -(X-4)^3$ ist, hat A den Eigenwert $\lambda_1 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 3.

Da der einzige Eigenwert von A reell ist, können wir die Bestimmung der Jordanschen Normalform in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ durchführen, wir müssen nicht ins Komplexe gehen.

Also müssen wir zunächst eine Basis von

$$\mathbb{R}^{3\times 1} = \mathrm{H}_A(4) = \mathrm{Kern}((A - 4\mathrm{E}_3)^3)$$

aus Hauptvektoren bestimmen.

Wir formen um:

$$A_{(1)} := A - 4\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also hat $\mathrm{E}_A(4) = \mathrm{Kern}(A - 4\mathrm{E}_3)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Inbesondere hat $\lambda_1 = 4$ die geometrische Vielfachheit 1 und A ist nicht diagonalisierbar.

Wir formen um:

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also hat $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Wir formen um:

$$A_{(1)}^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also hat $\mathrm{H}_A(4) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Wir bestimmen eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist.

Die Spalten von S bestehen aus Hauptvektorketten zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$.

Wir kennen die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{H}_A(4) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$.

Wir geben den Basisvektoren Bezeichnungen, die mit dem vorderen Index andeuten, in welchem Schritt wir sie hinzugefügt haben.

$$\begin{aligned} x_{1,1} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(1)}) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3) \\ x_{2,1} &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3) \\ x_{3,1} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3) \end{aligned}$$

Alle Basisvektoren, die wir im letzten Schritt hinzugefügt haben, sind Teil einer Hauptvektorkette und damit Teil einer Jordanbasis.

Dies war nur ein Basisvektor und für diesen setzen wir $y_{3,1} := x_{3,1}$.

Dieser ergibt die Hauptvektorkette $(A_{(1)}^2 y_{3,1}\,, A_{(1)} y_{3,1}\,, y_{3,1})$ der Länge $3 = \dim \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Also ist $(A_{(1)}^2 y_{3,1}\,, A_{(1)} y_{3,1}\,, y_{3,1})$ eine Jordanbasis von A.

Wir berechnen $A_{(1)} y_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $A_{(1)}^2 y_{3,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Also ist $S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix mit

$$J = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

in Jordanscher Normalform.

Wir berechnen S^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Also ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Es ist $\exp(Jx) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4x} & x\mathrm{e}^{4x} & \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{4x} \\ 0 & \mathrm{e}^{4x} & x\mathrm{e}^{4x} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Damit wird

$$\begin{aligned} \exp(Ax) &= S \exp(Jx) S^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} -1 & -x & 1-\frac{x^2}{2} \\ 0 & -1 & -x \\ -1 & 2-x & 2x-\frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1-\frac{x^2}{2} & x+x^2 & \frac{x^2}{2} \\ -x & 1+2x & x \\ 2x-\frac{x^2}{2} & x^2-3x & 1-2x+\frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Also ist $\left(\mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} 1-\frac{x^2}{2} \\ -x \\ 2x-\frac{x^2}{2} \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} x+x^2 \\ 1+2x \\ x^2-3x \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1-2x+\frac{x^2}{2} \end{pmatrix}\right)$ ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

Da S reell ist, enthält alternativ auch $S \exp(Jx)$ in den Spalten ein Fundamentalsystem.

(b) Wir machen den Ansatz

$$y(x) = \mathrm{e}^{4x}\left(a \begin{pmatrix} 1-\frac{x^2}{2} \\ -x \\ 2x-\frac{x^2}{2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x+x^2 \\ 1+2x \\ x^2-3x \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1-2x+\frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \right)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Die Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ führ auf folgendes $\mathbb{R}$-lineare Gleichungssystem.

$$y(1) = \mathrm{e}^4 (\, a \left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 3/2 \end{smallmatrix}\right) + b \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + c \left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{smallmatrix}\right) \,) \overset{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$$

Dieses hat die Lösung $a = 0$, $b = \mathrm{e}^{-4}$ und $c = 0$.

Insgesamt ist also

$$y(x) = \mathrm{e}^{4x}\mathrm{e}^{-4} \left(\begin{smallmatrix} x+x^2 \\ 1+2x \\ x^2-3x \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{e}^{4(x-1)} \left(\begin{smallmatrix} x+x^2 \\ 1+2x \\ x^2-3x \end{smallmatrix}\right)$$

die Lösung von $y' = Ay$ zur Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Hausaufgabe 95 Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) y + \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung. Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Wir bestimmen zuerst ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Dazu berechnen wir $\exp(Ax)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zunächst bringen wir A in Jordansche Normalform. Wir berechnen das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_3) \\ &= \det \left(\begin{smallmatrix} -X & 2 & 0 \\ -2 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{smallmatrix}\right) \\ &= (2 - X) \cdot \det \left(\begin{smallmatrix} -X & 2 \\ -2 & -X \end{smallmatrix}\right) \\ &= (2 - X) \cdot (X^2 + 4) \\ &= -(X - 2)(X + 2\mathrm{i})(X - 2\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = 2\mathrm{i}$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Somit ist A diagonalisierbar, d.h. die Jordansche Normalform von A ist eine Diagonalmatrix.

Zu $\lambda_1 = 2$. Wir formen um: $A - 2\mathrm{E}_3 = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Also hat $\mathrm{E}_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2\mathrm{E}_3)$ die Basis $(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$.

Zu $\lambda_2 = -2\mathrm{i}$. Wir formen um: $A + 2\mathrm{i}\mathrm{E}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 2\mathrm{i} & 2 & 0 \\ -2 & 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Also hat $\mathrm{E}_A(-2\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(A + 2\mathrm{i}\mathrm{E}_3)$ die Basis $(\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$.

Zu $\lambda_3 = 2\mathrm{i}$. Wir formen um: $A - 2\mathrm{i}\mathrm{E}_3 = \left(\begin{smallmatrix} -2\mathrm{i} & 2 & 0 \\ -2 & -2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2-2\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Also hat $\mathrm{E}_A(-2\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(A + 2\mathrm{i}\mathrm{E}_3)$ die Basis $(\left(\begin{smallmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$ oder aber $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$.

Mit der invertierbaren Matrix $S := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ wird also $D := S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir berechnen S^{-1}.

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1/2 & -\mathrm{i}/2 & 0 \\ -\mathrm{i}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Also ist $S^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Damit wird

$$\begin{aligned}
\exp(Ax) &= S\exp(Dx)S^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} & 0 \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} & 0 \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) & 0 \\ -\sin(2x) & \cos(2x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Also ist $\left(\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\right)$ ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

Für $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten: Wir wollen für

$$y(x) = c(x)\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} + d(x)\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{pmatrix} + e(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$$

geeignete Funktionen $c(x)$, $d(x)$ und $e(x)$ auf $\mathbb{R}$ bestimmen. Es soll die folgende Gleichung gelten.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= c(x)\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix}' + d(x)\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{pmatrix}' + e(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}' + c'(x)\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} + d'(x)\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{pmatrix} + e'(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \\
&\overset{!}{=} Ay(x) + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung dessen, dass $\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$ Lösungen von $y' = Ay$ sind, vereinfacht sich dies zu

$$c'(x)\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} + d'(x)\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{pmatrix} + e'(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $e'(x)$ gilt also $e'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} = 0$, d.h. $e'(x) = 0$. Also ist $e(x) = u$ für ein $u \in \mathbb{R}$.

Für $c'(x)$ und $d'(x)$ gilt also

$$\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c'(x) \\ d'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{pmatrix} c'(x) \\ d'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & -\sin(2x) \\ \sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Mit partieller Integration wird also

$$\begin{aligned}
[c(x)] &= \int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x &&= \tfrac{x}{2}\sin(2x) - \tfrac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x &&= [\tfrac{x}{2}\sin(2x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x)] \\
[d(x)] &= \int x\sin(2x)\,\mathrm{d}x &&= -\tfrac{x}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x &&= [-\tfrac{x}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\sin(2x)],
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
c(x) &= \tfrac{x}{2}\sin(2x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x) + s \\
d(x) &= -\tfrac{x}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\sin(2x) + t
\end{aligned}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$. Insgesamt ist also jede Lösung von $y' = Ay + \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ von der Form

$$\begin{aligned}
y(x) &= c(x) \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + d(x) \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + e(x) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\tfrac{x}{2}\sin(2x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x) + s\right) \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(-\tfrac{x}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\sin(2x) + t\right) \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + u \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} (\frac{x}{2}\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x))\cos(2x)+(-\frac{x}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x))\sin(2x) \\ -(\frac{x}{2}\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x))\sin(2x)+(-\frac{x}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x))\cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + u \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} \frac{x}{2}(\sin(2x)\cos(2x)-\cos(2x)\sin(2x))+\frac{1}{4}(\cos(2x)^2+\sin(2x)^2) \\ -\frac{x}{2}(\sin(2x)^2+\cos(2x)^2)-\frac{1}{4}(\cos(2x)\sin(2x)-\sin(2x)\cos(2x)) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + u \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right) \\
&= \tfrac{1}{4} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + u \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

mit $s, t, u \in \mathbb{R}$.

Wir machen eine Probe. Für $y(x) = \frac{1}{4} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + u \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$\begin{aligned}
y'(x) - Ay(x) &= \left(\left(\begin{smallmatrix} 1/4 \\ -x/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + u \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right)\right)' \\
&\quad - A \cdot (\left(\begin{smallmatrix} 1/4 \\ -x/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + u \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right)) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1/4 \\ -x/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} -x \\ -1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $\left(\begin{smallmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{smallmatrix}\right)$ Lösungen von $y' = Ay$ sind.

Damit ist bestätigt, dass $y(x)$ tatsächlich eine Lösung von $y' = Ay + \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

Hausaufgabe 96

(a) Finden Sie $A,\ B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\exp(A + B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$. Ist $AB = BA$?

(b) Sei $n \geqslant 1$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Bestätigen Sie unter Verwendung der Definition der Matrixexponentialfunktion: $\exp(A^{\mathrm{t}}) = \exp(A)^{\mathrm{t}}$.

Lösung.

(a) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Es ist A diagonal. Also ist $\exp(A) = \left(\begin{smallmatrix} \exp(1) & 0 \\ 0 & \exp(0) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Es $B^n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Also ist $\exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \mathrm{E}_2 + B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Damit wird $\exp(A)\exp(B) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Es ist $(A+B)^n = A+B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Damit wird

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \mathrm{E}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}-1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Insgesamt ist also

$$\exp(A)\exp(B) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}-1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \exp(A+B).$$

Außerdem ist $AB = B \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = BA$.

Wäre $AB = BA$, so wäre $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ nach der zweiten Bemerkung in §6.4.2.1.

(b) Wir machen eine Vorüberlegung.

Sei $(B_l)_{l \geqslant 0}$ eine Folge von Matrizen $B_l \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Wir schreiben $B_l = (b_{l;j,k})_{j,k}$.

Dann gilt $\displaystyle \sum_{l=0}^{\infty} (B_l)^{\mathrm{t}} = \sum_{l=0}^{\infty} (b_{l;k,j})_{j,k} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_{l;k,j}\right)_{j,k} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_{l;j,k}\right)_{j,k}^{\mathrm{t}} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} B_l\right)^{\mathrm{t}}$.

Unter Verwendung dieser Vorüberlegung wird

$$\exp(A^{\mathrm{t}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{\mathrm{t}})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}A^k\right)^{\mathrm{t}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k\right)^{\mathrm{t}} = \exp(A)^{\mathrm{t}}.$$