Mathematik 2 für inf, swt, msv

Lösung 25

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 97 Wir betrachten die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = y'' + 4y' - 4y + 12\mathrm{e}^{2x}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer Probe.

Lösung. Wir setzen $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$, um die Differentialgleichung in ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung zu übersetzen.
Dies ergibt

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zuerst alle Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Dazu berechnen wir zuerst die Eigenwerte von $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ -4 & 4 & 1-X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4+X(1-X) & 1-X \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -X & 1-X \\ -4 & X(1-X) \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -X & 1-X \\ -4+X^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -(X-1)(X^2-4) \end{aligned}$$

Es besitzt also A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$. Wir bestimmen den jeweiligen Eigenvektor zu den Eigenwerten.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1: &\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &&\Rightarrow \mathrm{E}_A(1) = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \lambda_2 = 2: &\quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &&\Rightarrow \mathrm{E}_A(2) = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \lambda_3 = -2: &\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &&\Rightarrow \mathrm{E}_A(-2) = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ wird $S^{-1}AS = D$.

Es ist $\exp(Dx) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}$. Es ist $\exp(Ax) = S\exp(Dx)S^{-1}$. Da S invertierbar ist, enthält aber auch $\exp(Ax)S = S\exp(Dx)$ in den Spalten ein Fundamentalsystem.
Also ist die allgemeine Lösung des zugehörigen Differentialgleichungssystems $z' = Az$ von der Form

$$c_1\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

mit c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$.
Wir machen den Ansatz der Variation der Konstanten und suchen eine partikuläre Lösung zu $z' = Az + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$ der Form

$$z_{[0]}(x) \;=\; c_1(x)\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(x)\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3(x)\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf die Bedingung

$$c_1'(x)\mathrm{e}^x \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2'(x)\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + c_3'(x)\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}.$$

Das heißt, wir suchen eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x} & 1 & \mathrm{e}^{-4x}\\ \mathrm{e}^{-x} & 2 & -2\mathrm{e}^{-4x}\\ \mathrm{e}^{-x} & 4 & 4\mathrm{e}^{-4x}\end{pmatrix} c' = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e}^{-x} & 1 & \mathrm{e}^{-4x} & 0\\ \mathrm{e}^{-x} & 2 & -2\mathrm{e}^{-4x} & 0\\ \mathrm{e}^{-x} & 4 & 4\mathrm{e}^{-4x} & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e}^{-x} & 1 & \mathrm{e}^{-4x} & 0\\ 0 & 1 & -3\mathrm{e}^{-4x} & 0\\ 0 & 3 & 3\mathrm{e}^{-4x} & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e}^{-x} & 0 & 4\mathrm{e}^{-4x} & 0\\ 0 & 1 & -3\mathrm{e}^{-4x} & 0\\ 0 & 0 & 12\mathrm{e}^{-4x} & 12 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{e}^{-x} & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-4x} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4\mathrm{e}^{x}\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{e}^{4x} \end{array}\right)$$

Also ist $c_1'(x) = -4\mathrm{e}^x$, $c_2'(x) = 3$ und $c_3'(x) = \mathrm{e}^{4x}$. Wir wählen folgende Stammfunktionen.

$$c_1(x) = -4\mathrm{e}^x, \qquad c_2(x) = 3x + \frac{15}{4}, \qquad c_3(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}$$

Dies ergibt die folgende partikuläre Lösung.

$$z_{[0]}(x) = -4\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (3x + \tfrac{15}{4})\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} \cdot \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix}3x\\6x+3\\12x+12\end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $z' = Az + \begin{pmatrix}0\\0\\12\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}$ ist damit gegeben durch

$$z(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix}3x\\6x+3\\12x+12\end{pmatrix} + c_1\mathrm{e}^x \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix},$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Wegen $z_1 = y$ ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = 3x\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-2x}.$$

Probe. Wir erhalten die folgenden Ableitungen.

$$\begin{aligned} y &= 3x\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-2x}\\ y' &= (3+6x)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + 2c_2\mathrm{e}^{2x} - 2c_3\mathrm{e}^{-2x}\\ y'' &= (12+12x)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + 4c_2\mathrm{e}^{2x} + 4c_3\mathrm{e}^{-2x}\\ y''' &= (36+24x)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + 8c_2\mathrm{e}^{2x} - 8c_3\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned} & y'' + 4y' - 4y + 12\mathrm{e}^{2x}\\ = \; & ((12+12x)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + 4c_2\mathrm{e}^{2x} + 4c_3\mathrm{e}^{-2x}) + 4((3+6x)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + 2c_2\mathrm{e}^{2x} - 2c_3\mathrm{e}^{-2x})\\ & -4(3x\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-2x}) + 12\mathrm{e}^{2x}\\ = \; & (36+24x)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + 8c_2\mathrm{e}^{2x} - 8c_3\mathrm{e}^{-2x}\;. \end{aligned}$$

Das ist dasselbe wie y'''.

Hausaufgabe 98 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x+1} + \frac{(x+1)^2}{y^2}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>-1}$.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer Probe.

Lösung. Die gegebene Differentialgleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = -2$, $a(x) = \frac{1}{x+1}$ und $b(x) = (x+1)^2$.
Wir haben also folgende lineare Differentialgleichung zu lösen, die wir durch Substitution mit $u = y^3$ erhalten.

$$u' = 3\frac{u}{x+1} + 3(x+1)^2$$

Die zugehörige lineare Differentialgleichung $u' = 3\frac{u}{x+1}$ ist separierbar. Aus $[\ln(|u|)] = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x = [3\ln(|1+x|)] \overset{x>-1}{=} [\ln((1+x)^3)]$ folgt $\ln(|u|) = \ln((1+x)^3) + d$ für ein $d \in \mathbb{R}$. Also $|u| = (1+x)^3 \cdot \mathrm{e}^d$. Also $u = (1+x)^3 \cdot c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (auch $u = 0$ ist eine Lösung).

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz $u(x) = c(x)(x+1)^3$. Aus $c'(x)(x+1)^3 = 3(x+1)^2$ folgt $c'(x) = \frac{3}{x+1}$. Also ist $c(x) = 3\ln(x+1) + d$ mit $d \in \mathbb{R}$, man beachte wieder $x > -1$.
Zusammen erhalten wir als allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$u(x) = (3\ln(x+1) + d)(x+1)^3.$$

Wegen $u = y^3$ ist

$$y(x) = \sqrt[3]{(3\ln(x+1)+d)(x+1)^3} = (x+1)\sqrt[3]{3\ln(x+1)+d},$$

wobei wir die dritte Wurzel als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ verwenden, namentlich als Umkehrfunktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.
Wir machen eine Probe.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sqrt[3]{3\ln(x+1)+d} + (x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(3\ln(x+1)+d)^{2/3}}\cdot\frac{3}{x+1} \\
&= \sqrt[3]{3\ln(x+1)+d} + \frac{1}{(3\ln(x+1)+d)^{2/3}} \\
\frac{y}{x+1} + \frac{(x+1)^2}{y^2} &= \sqrt[3]{3\ln(x+1)+d} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2(3\ln(x+1)+d)^{2/3}} \\
&= \sqrt[3]{3\ln(x+1)+d} + \frac{1}{(3\ln(x+1)+d)^{2/3}}
\end{aligned}$$

Das ist dasselbe. Also ist $y(x) = (x+1)\sqrt[3]{3\ln(x+1)+d}$ mit $d \in \mathbb{R}$ als Lösung bestätigt.

Hausaufgabe 99 Wir betrachten auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Differentialgleichung

$$y' = xy^2 + \frac{y}{x} - 9x^3.$$

(a) Bestätigen Sie, dass $\eta(x) := 3x$ eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer Probe.

Lösung.

(a) Mit $y(x) = \eta(x) = 3x$ wird die linke Seite zu 3, die rechte Seite wird dagegen zu $x(3x)^2 + \frac{3x}{x} - 9x^3 = 3$. Also ist $\eta(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung.

(b) Die gegebene Differentialgleichung ist eine Riccatische Differentialgleichung mit partikulärer Lösung $\eta(x) = 3x$, sowie $a(x) = x$, $b(x) = \frac{1}{x}$ und $c(x) = -9x^3$.

Wir haben also folgende lineare Differentialgleichung zu lösen, die wir durch die Substitution $y = \eta + \frac{1}{v}$ erhalten.

$$v' \;=\; -(\tfrac{1}{x} + 2 \cdot x \cdot (3x))v - x = -(\tfrac{1}{x} + 6x^2)v - x$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung $v' = -(\frac{1}{x} + 6x^2)v$ besitzt die allgemeine Lösung $v(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-\ln(|x|)-2x^3} = \frac{c}{x\mathrm{e}^{2x^3}}$, wobei wir $x > 0$ benutzt haben und wobei $c \in \mathbb{R}$ ist.

Für die inhomogene Differentialgleichung machen wir den Ansatz $v(x) = \frac{c(x)}{x\mathrm{e}^{2x^3}}$. Aus $\frac{c'(x)}{x\mathrm{e}^{2x^3}} = -x$ folgt $c'(x) = -x^2\mathrm{e}^{2x^3}$. Wir integrieren

$$\int -x^2\mathrm{e}^{2x^3}\,\mathrm{d}x = \int -\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = [-\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^u] = [-\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{2x^3}].$$

Damit erhalten wir $c(x) = -\frac{\mathrm{e}^{2x^3}}{6} + d$ mit $d \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$v(x) = -\frac{\mathrm{e}^{2x^3}}{6x\mathrm{e}^{2x^3}} + \frac{d}{x\mathrm{e}^{2x^3}} = \frac{6d - \mathrm{e}^{2x^3}}{6x\mathrm{e}^{2x^3}}.$$

Wegen $y = \eta + \frac{1}{v}$ ist

$$y(x) = 3x + \frac{6x\mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}} = 3x\frac{6d - \mathrm{e}^{2x^3} + 2\mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}} = 3x\frac{6d + \mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}}.$$

Eine Probe bestätigt das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 3\frac{6d + \mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}} + 3x\frac{6x^2\mathrm{e}^{2x^3}(6d - \mathrm{e}^{2x^3}) + 6x^2\mathrm{e}^{2x^3}(6d + \mathrm{e}^{2x^3})}{(6d - \mathrm{e}^{2x^3})^2} \\
&= 3\frac{6d + \mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}} + 9x^3\frac{24d\mathrm{e}^{2x^3}}{(6d - \mathrm{e}^{2x^3})^2} \\
xy^2 + \frac{y}{x} - 9x^3 &= 9x^3\frac{(6d + \mathrm{e}^{2x^3})^2}{(6d - \mathrm{e}^{2x^3})^2} + 3\frac{6d + \mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}} - 9x^3 \\
&= 3\frac{6d + \mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}} + 9x^3\frac{(6d + \mathrm{e}^{2x^3})^2}{(6d - \mathrm{e}^{2x^3})^2} - 9x^3\frac{(6d - \mathrm{e}^{2x^3})^2}{(6d - \mathrm{e}^{2x^3})^2} \\
&= 3\frac{6d + \mathrm{e}^{2x^3}}{6d - \mathrm{e}^{2x^3}} + 9x^3\frac{24d\mathrm{e}^{2x^3}}{(6d - \mathrm{e}^{2x^3})^2}
\end{aligned}$$

Das ist dasselbe.