Klausur zur Mathematik 1/2

für Informatikstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind nachvollziehbare Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–11** sind nur die Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2020** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2020** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Gegeben ist die Abbildung

$$f \;:\; \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{R} \;:\; (x,y) \;\mapsto\; x^3 - 12x + (x-3)(y+3)^2 \;.$$

(a) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(b) Entscheiden Sie für jede Flachstelle von f, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; \mathrm{e}^{-y}$$

auf $\mathbb{R}_{>-1}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}AS = D$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' \;=\; Ay$$

auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$z'' \;=\; 4z' + 5z$$

auf $\mathbb{R}$ zu den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $z'(0) = 1$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 5 (7 Punkte) Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3k+1}}$.

(b) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{\ln(k)}$ konvergent? Ist sie absolut konvergent?

Sie dürfen $\ln(k) \leqslant k$ für $k \geqslant 2$ verwenden.

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ von Grad 3.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 5y \\ 4y \end{pmatrix}.$$

Sei $B := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Sei $C := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ die Standardbasis und $D := (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von f bezüglich C und B, sowie die beschreibende Matrix von id bezüglich C und D.

$_C f_B =$ $\qquad$ $_C \operatorname{id}_D =$

(b) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von id bezüglich D und C, sowie die beschreibende Matrix von f bezüglich D und B.

$_D \operatorname{id}_C =$ $\qquad$ $_D f_B =$

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ bezüglich D.

$_D f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) =$

Aufgabe 9 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{\, (x,y) \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \;:\; x \cdot y = 1 \,\} \;=$

(b) $\{\, x \in \mathbb{F}_7 \;:\; x^2 + x + 1 = 0 \,\} \;=$

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge $\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; z^3 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \wedge |z| \leqslant 2 \,\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 11 (2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle \lim_{x \to -5} \frac{\sqrt{x^2 - 16} - 3}{x + 5} =$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \exp\!\left(\frac{\sin(x \ln(9))}{2x} \right) =$