

Klausur zur Mathematik 1/2

für Informatikstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind nachvollziehbare Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–11** sind nur die Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.04.2021** im Campus-System bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.04.2021** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$(a) \int_{\sqrt{\pi^2-3}}^{\sqrt{4\pi^2-3}} \frac{x \sin(\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}} dx$$

$$(b) \int (x^2 + 2x + 1)e^x dx$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Gegeben sind die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y(2 - x^2) - 2(y - 1)^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -x^2 + y^2 + 8x - 13$.

(a) Berechnen Sie die Gradienten ∇_f und ∇_g . Berechnen Sie die Hessematrizen H_f und H_g .

(b) Zeigen Sie, dass $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Entscheiden Sie, ob $(2, 1)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{3}{y}$$

auf $\mathbb{R}_{>-\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(a) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $S^{-1}AS = D$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

auf \mathbb{R} zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$z'' = 2z' + 8z$$

auf \mathbb{R} zu den Anfangsbedingungen $z(0) = 2$ und $z'(0) = 2$.

Aufgabe 5 (6 Punkte) Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k!}$.

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:**Aufgabe 7 (2 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(4x) + x^4 - 1} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \cos\left(\frac{\pi \ln\left(\frac{x}{2}\right)}{2x - 4}\right) =$

Aufgabe 8 (3 Punkte)Skizzieren Sie die Mengen $A := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + i|\}$, $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i)| = 2\}$ und $C := A \cap B$ in der Gaußschen Zahlenebene.**Aufgabe 9 (2 Punkte)** Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{(x, y) \in (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x \cdot y = 0\} =$

(b) $\{x \in \mathbb{F}_4 : x^2 + x + 1 = 0\} =$

Name,
Vorname:

Matrikel-
Nummer:

Aufgabe 10 (4 Punkte) Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{F}_5^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{F}_5^{2 \times 1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ -x - 2z \end{pmatrix}.$$

Sei $B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_5^{3 \times 1}$.

Sei $C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis und $D := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{F}_5^{2 \times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von f bezüglich C und B .

$${}_C f_B =$$

(b) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von id bezüglich C und D , sowie die beschreibende Matrix von id bezüglich D und C .

$${}_C \text{id}_D =$$

$${}_D \text{id}_C =$$

(c) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von f bezüglich D und B .

Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ bezüglich D .

$${}_D f_B =$$

$${}_D f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) =$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Zerlegen Sie $c(X) := X^3 - \frac{5}{2}X^2 + 3X - 1 \in \mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

$$c(X) =$$