<u>Bsp</u> zur Abhängigkeit von den Anfangswerten.

Wir betrachten auf $D = \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$y' = 3y + 9 \cdot x$$

Zunächst lösen wir sie.

Dazu lösen wir zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y' = 3y.$$

Es wird

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{y'}{y}\,dx = \int 3\,dx$$

$$\left[\ln(|y|)\right] \qquad\qquad \left[3x\right]$$

Also $\ln(|y|) = 3x + \tilde{c}$

für ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.

Also $|y| = e^{3x} \cdot e^{\tilde{c}}$

Also $y = e^{3x} \cdot \underbrace{\left(\pm e^{\tilde{c}}\right)}_{=:\, c}$

Dies ist auch noch eine Lösung im Fall $c = 0$.

Somit erhalten wir für unsere homogene Differentialgleichung $y' = 3y$ die Lösung

$$y = y(x) = e^{3x} \cdot c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

Wir machen für unsere inhomogene Differentialgleichung

$$y' = 3y + 9x$$

den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y(x) = e^{3x} \cdot c(x).$$

Es wird

$$y'(x) = 3e^{3x} \cdot c(x) + e^{3x} \cdot c'(x).$$

Es sollte also sein:

$$3e^{3x} \cdot c(x) + e^{3x} \cdot c'(x)$$

$$\overset{!}{=} 3 \cdot \left(e^{3x} \cdot c(x) \right) + 9x$$

Es sollte also sein:

$$c'(x) \overset{!}{=} 9x \cdot e^{-3x}.$$

Somit wird

$$[c(x)] = \int c'(x)\, dx$$

$$\overset{!}{=} \int 9x \cdot e^{-3x}\, dx = \ldots$$

$$\ldots = \left[9x \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) e^{-3x} \right] - \int 9 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) e^{-3x}\, dx$$

$$= \left[-3x e^{-3x} - e^{-3x} \right]$$

Also

$$c(x) = -3x e^{-3x} - e^{-3x} + d,$$

wobei $d \in \mathbb{R}$.

Also

$$y = y(x) = e^{3x} \cdot c(x)$$

$$= -3x - 1 + d e^{3x}$$

Nun zur Abhängigkeit von den Anfangswerten.

Wir müssen ein passendes $L \in \mathbb{R}$

für die Lipschitzbedingung finden.

Es ist $f(x,y) = 3y + 9x$.

Also ist $f_y(x,y) = 3$.

Also ist $f_y(x,y) \leq 3 =: L$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Betrachten wir nun zwei

Lösungen:

$$y(x) := -3x - 1 + 2e^{3x}$$

$$\tilde{y}(x) := -3x - 1 + 6e^{3x}.$$

Gemäß zweitem Lemma aus § 6.3 sollte nun folgende Abschätzung gelten, für $\hat{x} := 0$:

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq |\tilde{y}(0) - y(0)| \cdot e^{3|x-0|}$$

Die linke Seite wird zu

$$|\tilde{y}(x) - y(x)|$$

$$= \left| (-3x - 1 + 6 \cdot e^{3x}) - (-3x - 1 + 2e^{3x}) \right|$$

$$= 4 \cdot e^{3x},$$

Die rechte Seite wird zu

$$|\tilde{y}(0) - y(0)| \cdot e^{3|x|}$$

$$= |(-3 \cdot 0 - 1 + 6 \cdot e^{3 \cdot 0}) - (-3 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot e^{3 \cdot 0})| \cdot e^{3|x|}$$

$$= 4 \cdot e^{3|x|}.$$

Und in der Tat ist

$$4 \cdot e^{3x} \leqslant 4 e^{3|x|}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Man beachte, daß bei $(\leqslant)$

für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine

Gleichheit steht:

$$4e^{3x} = 4e^{3|x|}$$

Man wird also wohl

keine bessere Abschätzung

finden können, mit der

$|y(x) - \tilde{y}(x)|$ unter

Verwendung von

$|y(\hat{x}) - \tilde{y}(\hat{x})|$ ...

... abgeschätzt werden kann.

Eine solche Abschätzung führt zu einem "kontrollierbaren Verhalten": eine kleine Störung bei $\hat{x}$ führt nur zu einer begrenzten Änderung bei x: