Bsp für ein lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Wir suchen auf D die Lösung von

$$y' = \begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

mit $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zu lösen ist also,

mit $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix},$$

also

$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= x^{-1} y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= x^{-1} y_2(x) + 2x, \end{aligned}\right\} \circledast$$

Fangen wir mit der zweiten Gleichung von $\circledast$ an. Wir betrachten die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y_2'(x) = x^{-1} y_2(x)$$

Es wird

$$\int \frac{1}{y_2}\, dy_2 = \int \frac{y_2'}{y_2}\, dx$$

$$= \int x^{-1}\, dx ,$$

also $\left[\ln(|y_2|) \right] = \left[\ln(|x|) \right]$

$$\overset{x>0}{=} \left[\ln(x) \right] ,$$

also $\ln(|y_2|) = \ln(x) + \tilde{c}$

für ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, also

$$y_2 = e^{\ln(x)} \cdot \underbrace{\left(\pm e^{\tilde{c}} \right)}_{=: c}$$

Ansatz: $y_2 = x \cdot c$.

Variation der Konstanten:

$$y_2 = x \cdot c(x)$$

Einsetzen in inhomogene Differentialgleichung:

$$y_2' = x^{-1} y_2 + 2x$$

$$\begin{array}{ccc} y_2' & = & x^{-1} y_2 + 2x \\ \| & & \| \\ x \cdot c'(x) + c(x) & & c(x) + 2x \end{array}$$

$\Rightarrow \quad c'(x) = 2$

$\Rightarrow \quad c(x) = 2x + d$ für ein $d \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad y_2 = y_2(x) = 2x^2 + dx$$

Damit wird die erste Gleichung von ⊛ zu

$$y_1' = x^{-1} y_1 + 2x^2 + dx$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung haben wir gerade betrachtet: Es hat

$$y_1' = x^{-1} y_1$$

die Lösung

$$y_1 = y_1(x) = sx$$

für ein $s \in \mathbb{R}$.

Variation der Konstanten:

$$y_1 = x \cdot s(x).$$

Einsetzen in inhomogene Differentialgleichung:

$$y_1' = x^{-1} y_1 + 2x^2 + dx$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ x \cdot s'(x) + s(x) & & s(x) + 2x^2 + dx \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad s'(x) = 2x + d$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = x^2 + dx + t$$

für ein $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_1(x) = x^3 + dx^2 + tx$$

$$\Rightarrow \quad y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^3 + dx^2 + tx \\ 2x^2 + dx \end{pmatrix}$$

Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = y(1) = \begin{pmatrix} 1^3 + d \cdot 1^2 + t \cdot 1 \\ 2 \cdot 1^2 + d \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y(x) = \begin{pmatrix} x^3 + x^2 \\ 2x^2 + x \end{pmatrix}}$$

<u>Probe</u>:

- Ist die Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix} \ldots$$

01.07.2019

erfüllt?

$$y' = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x \\ 4x + 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 + x^2 \\ 2x^2 + x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 + x + 2x^2 + x \\ 2x + 1 + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x \\ 4x + 1 \end{pmatrix}$$

- Ist die Anfangsbedingung erfüllt?

01.07.2020

$$y(1) = \begin{pmatrix} 1^3 + 1^2 \\ 2 \cdot 1^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ja.