Bsp für Fundamentalsystem.

Wir setzen das Bsp. von 01.07.20 – II fort.

Wir betrachten zunächst das zugehörige homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} y$$

auf $D = \mathbb{R}_{>0}$.

zu lösen ist mit

$$y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

also ...

$$\left.\begin{aligned} \ldots \quad y_1'(x) &= x^{-1} y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= x^{-1} y_2(x) \end{aligned}\right\} \circledast$$

Fangen wir mit der zweiten Gleichung von $\circledast$ an.

Wie auf 01.07.20-12, 13, 14 ergibt sich: $y_2(x) = c \cdot x$, mit $c \in \mathbb{R}$.

Damit wird die erste Gleichung von $\circledast$ zu:

$$y_1'(x) = x^{-1} y_1(x) + c \cdot x.$$

Zugehörige homogene Differentialgleichung: ...

$$\ldots \quad y_1'(x) = x^{-1} y_1(x).$$

Wie eben hat diese die Lösung $y_1(x) = s \cdot x$, mit $s \in \mathbb{R}$.

Variation der Konstanten:

$$y_1(x) = s(x) \cdot x.$$

Damit in die inhomogene Differentialgleichung:

$$\begin{array}{ccc} y_1'(x) & \overset{!}{=} & x^{-1} y_1(x) + c \cdot x \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ s'(x) \cdot x & & s(x) + c \cdot x \\ + s(x) & & \end{array}$$

Also $s'(x) \overset{!}{=} c$.

Also $s(x) = cx + t$,

mit $t \in \mathbb{R}$.

Setzen wir zusammen:

$$y_1(x) = s(x) \cdot x = (cx+t) \cdot x$$

$$y_2(x) = c \cdot x$$

Es wird

$$y = y(x) = \begin{pmatrix} (cx+t) \cdot x \\ c \cdot x \end{pmatrix}$$

$$= c \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Lösungen $\boxed{\begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}}$ und $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}$ wird die Wronski-Determinante:

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} x^2 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = -x^2,$$

und dies auf $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Es ist $w(1) = -1 \neq 0$.

Also ist $\left(\begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, zu lesen als auf D definierte Funktionen in den beiden Spalten, ...

... ein Fundamental-

system für unser lineares

Differentialgleichungssystem

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}}_{A(x)} y .$$

In der Tat hatten wir

auch bereits den Lösungsraum

erhalten zu

$$L_{A,0} = \left\{ c \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : c, t \in \mathbb{R} \right\}$$

vgl. 03.07.20 - 4.

Nun wollen wir nochmals das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}}_{A(x)} y + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}}_{=: g(x)}$$

lösen. Nur wollen wir diesesmal nicht ad hoc vorgehen wie auf 01.07.20 – 11, sondern mit dem Ansatz der Variation der Konstanten.

Wir suchen also eine Partikulärlösung mit dem Ansatz

$$y(x) = \underbrace{c(x)}\begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + \underbrace{t(x)}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

variierte Konstanten

$$= \begin{pmatrix} c(x)\, x^2 + t(x)\, x \\ c(x)\, x \end{pmatrix}$$

Es wird

$$y'(x) = \begin{pmatrix} c'(x)\cdot x^2 + t'(x)\cdot x \\ c'(x)\cdot x \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \underline{c(x)\cdot 2x} + \underline{t(x)\cdot 1} \\ \underline{c(x)\cdot 1} \end{pmatrix}$$

Es wird

$$A(x) \cdot y(x) + g(x)$$

$$= \begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x)\,x^2 + t(x)\,x \\ c(x)\,x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{c(x)\,x} + \underline{t(x)} + \underline{c(x)\,x} \\ \underline{c(x)} + 2x \end{pmatrix}$$

Somit können wir

$$y'(x) \overset{!}{=} A(x) \cdot y(x) + g(x)$$

umformen zu ...

$$\begin{pmatrix} c'(x) \cdot x^2 + t'(x) \cdot x \\ c'(x) \cdot x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

Die Gleichheit im zweiten Eintrag können wir mit

$$c(x) := 2x$$

erfüllen. Gehen wir damit in die Gleichheit im ersten Eintrag, so sollte

$$2 \cdot x^2 + t'(x) \cdot x = 0$$

sein, d.h.

$$t'(x) = -2x .$$

Dies können wir erfüllen mit $t(x) := -x^2$

Hier müssen wir nicht alle möglichen Lösungen für $c(x)$ und $t(x)$ anführen. Jeweils eine Lösung genügt. Wir wollen ja auch nur eine Partikulärlösung unseres inhomogenen linearen Differentialgleichungsystems finden.

Als Partikulärlösung ergibt sich

$$y_{[0]}(x) = c(x)\begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + t(x)\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2x\begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + (-x^2)\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} x^3 \\ 2x^2 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich als

Lösungsmenge von $y' = A(x)y + g(x)$:

$$L_{A,g} = \left\{ \begin{pmatrix} x^3 \\ 2x^2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : c, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Dies stimmt mit unserem

alten Ergebnis von 01.07.20-17

überein.