Bsp zu Fundamentalsystem

Wir betrachten

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} y \qquad \text{auf } D = \mathbb{R}.$$

Gegeben sind uns ferner folgende Lösungsvorschläge, die wir überprüfen sollen:

wir werden auch noch lernen, wie man auf diese Lösungen kommt, aber das wissen wir noch nicht

$$y_{[1]}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_{[2]}(x) = \begin{pmatrix} x e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich ist

$$y_{[1]}'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y_{[1]}(x)$$

Ferner ist zum einen

$$y_{[2]}'(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} + 2xe^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

zum anderen wird

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y_{[2]}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xe^{2x} + e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe.

Somit liegen zwei Lösungen

$$\left(y_{[1]}(x) , y_{[2]}(x) \right) = \left(\begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \right)$$

auf $D = \mathbb{R}$ vor.

Bilden diese ein Fundamental-system?

Die Wronski-Determinante ist

$$w(x) = \det\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = e^{4x}$$

Und es ist $w(0) = 1 \neq 0$.

Es ist überhaupt $w(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, wie dies von der Theorie auch vorhergesagt wird, falls $w(x)$ an einer Stelle $\neq 0$ ist, Jedenfalls ist

$$\left(\begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \right)$$

zu lesen als Funktionen auf D

ein Fundamentalsystem.

Die Lösungen von

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y$$

sind also gegeben durch

$$y = y(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Also

$$L_{A,0} = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$