03.07.20-17

<u>Bsp.</u> zu Matrixexponentialfunktion

Wir wollen $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x\right)$ berechnen.

· Nach Definition ist

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x\right)^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\ell} x^{\ell}$$

$$= \frac{1}{0!} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{0}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} x^{0} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{1} \cdot x^{1} + \dots$$

$$\cdots + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2 \cdot x^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3 \cdot x^3$$

$$+ \ldots$$

Wir müssen uns also für

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^\ell$ interessieren. Ein paar Beispiele:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}8 & 12\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix}16 & 32\\ 0 & 16\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix}32 & 80\\ 0 & 32\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Wir raten die Formel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\ell} = \begin{pmatrix} 2^{\ell} & 2^{\ell-1} \cdot \ell \\ 0 & 2^{\ell} \end{pmatrix}$$

Nachweis mit Induktion:

I.A.: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$

$$\begin{pmatrix} 2^{0} & 2^{0-1} \cdot 0 \\ 0 & 2^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I.S. von $\ell - 1$ nach ℓ, wobei $\ell \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\ell} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\ell-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{I.V.}}{=} \begin{pmatrix} 2^{\ell-1} & 2^{\ell-2} \cdot (\ell-1) \\ 0 & 2^{\ell-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

03.07.20 – 28

$$\ldots = \begin{pmatrix} 2^{\ell} & 2^{\ell-1} + 2^{\ell-1}\cdot(\ell-1) \\ 0 & 2^{\ell} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{\ell} & 2^{\ell-1}\cdot \ell \\ 0 & 2^{\ell} \end{pmatrix}$$

Das setzen wir ein:

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x\right)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\ell} x^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \begin{pmatrix} 2^{\ell} x^{\ell} & 2^{\ell-1}\, \ell\cdot x^{\ell} \\ 0 & 2^{\ell}\cdot x^{\ell} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} 2^{\ell} x^{\ell} & \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} 2^{\ell-1}\cdot \ell \cdot x^{\ell} \\ 0 & \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} 2^{\ell}\cdot x^{\ell} \end{pmatrix} = \ldots$$

Nebenrechnungen:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} 2^l x^l = e^{2x}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} 2^{l-1} \cdot l \cdot x^l$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l-1)!} 2^{l-1} \cdot x^{l-1} \cdot x$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} 2^l x^l \cdot x$$

$$= e^{2x} \cdot x$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} e^{2x} & x \cdot e^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$