Bsp für Wurzelkriterium:

Wir wollen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ auf Konvergenz untersuchen. Es ist $a_k = \frac{1}{k^k}$.

Wir können mit dem Wurzelkriterium $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ betrachten.

Es ist $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{(k^k)^{1/k}} = \frac{1}{k}$.

Wir können also rechnen:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 < 1$$

Da das Resultat $< 1$ ist,

ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ konvergent.

(Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k} \underset{\text{rechner}}{\overset{\text{Taschen-}}{\approx}} 2{,}291286$, also eine Zahl, die vermutlich keinen Namen trägt)

---

Bsp für Quotientenkriterium:

Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ ?

Nochmal, nur diesmal mit Quotientenkriterium.

Es ist $a_k = \frac{1}{k^k}$.

Wir sollten dazu

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$ betrachten.

Es wird

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{1}{k^k}}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k^k}{(k+1)^k}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\to 0} = 0 < 1$$

Genauer: Sandwich

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{k^k}{(k+1)^k} \cdot \frac{1}{k+1}}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \quad \Longleftarrow$$

Jedenfalls folgt erneut, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k} \quad \text{konvergiert.}$$

---

Bsp für Majorantenkriterium:

Konvergiert $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ ?

Nochmal, nur diesmal mit Majorantenkriterium.

Wissen aus Bsp in § 4.5.2:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{konvergiert.}$$

Nun ist

$$0^0 = 1 = 0!,$$

und für $k \geq 1$ ist

$$k^k = k \cdot k \cdot \ldots \cdot k$$
$$\geq 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k = k!.$$

Also: $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{k!}$ für $k \geq 0$.

Somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ eine (nach Bsp. in § 4.5.2) konvergente Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$.

Also konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$.

<u>Bsp</u> für alle Konvergenzkriterien:

Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ?

Es ist $a_k = \frac{1}{k^3}$

Wurzelkriterium ansetzen:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{1}{k^3}\right)^{1/k} = k^{-\frac{3}{k}}$$

$$= \left(k^{\frac{1}{k}}\right)^{-3}$$

Drittes Bsp in § 4.3:

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Also:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left(k^{\frac{1}{k}}\right)^3$$

$$\underset{\text{stetig}}{\overset{f(t)=t^3}{=}} \left(\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}}\right)^3 = 1^3 = 1.$$

Das ist nicht < 1.

Mit dem Wurzelkrit. bekommen wir keine Konvergenzaussage.

Das war ein Fehlschlag:

wir wissen jetzt weder Konvergenz noch Divergenz.

06.05.20 -8

Wir müssen weitere Konvergenzkriterien versuchen.

Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)^3}}{\frac{1}{k^3}}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k^3}{(k+1)^3} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^3$$

$$\overset{\substack{f(t)=t^3\\ \text{stetig}}}{=} \left(\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}\right)^3$$

$$= \left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^3 = 1^3 = 1$$

Das ist <u>nicht</u> < 1. Fehlschlag.

Wir müssen weitere Konvergenzkriterien versuchen.

Majorantenkriterium:

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{für } k \geq 1,$$

also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine (nach Bsp in § 4.5.2) konvergente Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

Somit konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

( Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx 1{,}202057$, eine Zahl, die als $\zeta(3)$ bezeichnet wird. )