Bsp für Ableiten direkt nach Definition: Sei

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) := \sqrt{x}$$

Sei $x_0 > 0$. Wollen: $f'(x_0)$.

Es ist

$$\frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_0+h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}.$$

Also wird

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}$$

$$= \frac{1}{\left(\lim_{h \to 0} \sqrt{x_0+h}\right) + \sqrt{x_0}}$$

$$\underset{\text{stetig}}{\overset{t \mapsto \sqrt{t}}{=}} \frac{1}{\sqrt{\lim_{h \to 0} x_0+h} + \sqrt{x_0}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Alternative Berechnung mit Ableitungsregel:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Bei uns: $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Bsp für Produktregel:

Sei $f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^3+1)$.

Es wird ...

06.05.2014

$$\ldots f'(x) = \big((x+1)(x^2+1)\big)' \cdot (x^3+1)$$

$$+ (x+1)(x^2+1) \cdot (x^3+1)'$$

$$= (x+1)'(x^2+1)(x^3+1)$$

$$+ (x+1)(x^2+1)'(x^3+1)$$

$$+ (x+1)(x^2+1)(x^3+1)'$$

$$= 1 \cdot (x^2+1)(x^3+1)$$

$$+ (x+1) \cdot 2x \cdot (x^3+1)$$

$$+ (x+1)(x^2+1) \cdot 3x^2$$

$$= x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

$$+ 2x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 2x$$

$$+ 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 = \ldots$$

$$\ldots = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

(Natürlich hätte man auch erst ausmultiplizieren und dann ableiten können.)

<u>Bsp</u> für Quotientenregel

Sei $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Es wird

$$f'(x) = \frac{(x^2)'\cdot(x+1) - x^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x\cdot(x+1) - x^2\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Das hätte man auch als $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

oder als $\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$ schreiben können.

Alle diese Varianten gelten als zu Ende gerechnetes Ergebnis.

<u>Bsp</u> für Kettenregel (und Quotientenregel)

Sei $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Es wird $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$,

und also ...

06.05.20-17

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(x^2+1)'}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Es wird

$$f''(x) = (f')'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$$

$$= \frac{(x)' \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \ldots$$

06.05.2018

$$\ldots \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1 - x^2}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$= (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$