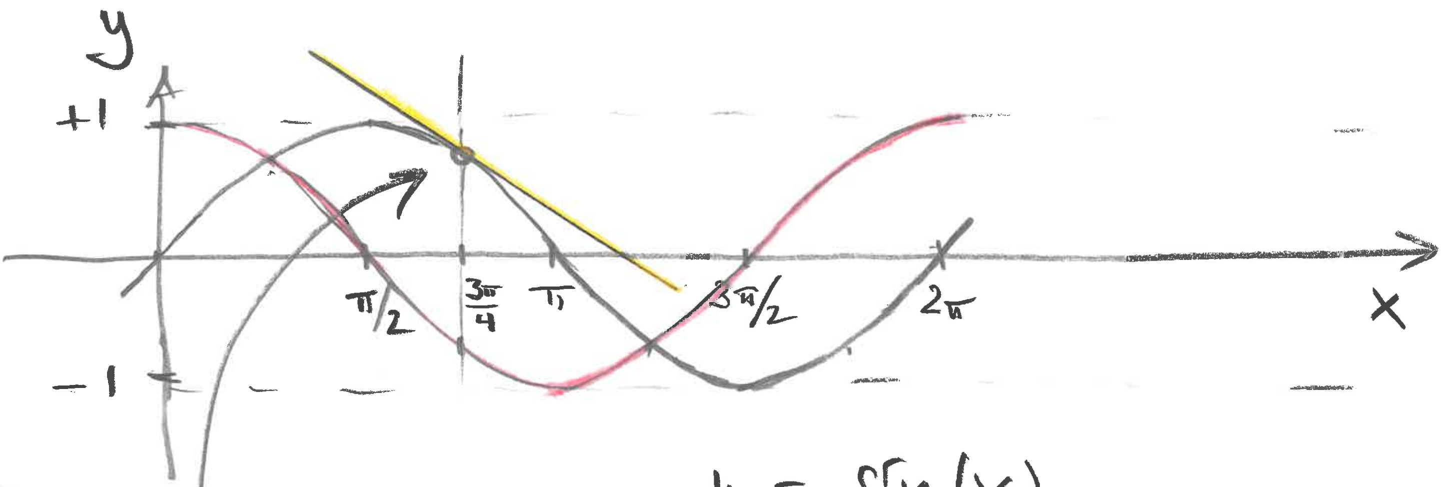
Bem zum Graphen der Sinus-Funktion



$$y = \sin(x)$$
$$y' = \cos(x)$$

Tangentensteigung von $\sin(x)$ bei $\frac{3\pi}{4}$ ist $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Bsp zu den Ableitungsregeln

Sei $f(x) := \sin(\sin(x))$

Wir sollen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ berechnen.

$$f'(x) \overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

$$f''(x) \overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \Big(\cos(\sin(x))\Big)' \cdot \cos(x)$$

$$+ \cos(\sin(x)) \cdot \Big(\cos(x)\Big)'$$

$$\overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{regel}}{=}} -\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x)$$

$$+ \cos(\sin(x)) \cdot \big(-\sin(x)\big)$$

$$= -\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)^2$$

$$- \cos(\sin(x)) \cdot \sin(x)$$

$$f'''(x) \overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{regel}}{=}} -\Bigg(\big(\sin(\sin(x))\big)' \cdot \cos(x)^2$$

$$+ \sin(\sin(x)) \cdot \big(\cos(x)^2\big)' \Bigg)$$

$$- \Bigg(\big(\cos(\sin(x))\big)' \cdot \sin(x)$$

$$+ \cos(\sin(x)) \cdot \big(\sin(x)\big)' \Bigg)$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} -\Bigg(\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x)^2$$

$$+ \sin(\sin(x)) \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) \Bigg)$$

$$- \Bigg(-\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

$$+ \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x) \Bigg)$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = -\cos(\sin(x))\left(\cos(x)^3 + \cos(x)\right)$$

$$+ 3\sin(\sin(x))\ \cos(x)\ \sin(x)$$

Bsp zu den Ableitungsregeln

Sei $f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$,

Wir sollen $f'(x)$, $f''(x)$ berechnen.

$$f'(x) \overset{\text{Quotienten-regel}}{=} \frac{(\sin(x))'\, x - \sin(x) \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$f''(x) \overset{\text{Quotienten-regel}}{=} \frac{(\cos(x))' \cdot x - \cos(x) \cdot (x)'}{x^2} - \frac{(\sin(x))' \cdot x^2 - \sin(x) \cdot (x^2)'}{x^4}$$

$$= \frac{-\sin(x) \cdot x - \cos(x)}{x^2} - \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{x^4}$$

$$= -\frac{\sin(x)}{x} - 2\frac{\cos(x)}{x^2} + 2\frac{\sin(x)}{x^3}$$

Bsp zu den Ableitungsregeln

Sei $f(x) = \sin(2x)$.

Wir sollen $f'(x)$ bestimmen, und zwar einmal direkt und einmal über den Umweg über das Additionstheorem.

Es sollte aber beidemale dasselbe herauskommen.

1. Direkt:

$$f'(x) \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Ketten-}}{=}} \cos(2x) \cdot (2x)'$$

$$= 2\cos(2x)$$

2. Über das Additionstheorem:

$$f(x) = \sin(2x)$$
$$= \sin(x+x)$$
$$= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)$$
$$= 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f'(x) \overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{regel}}{=}} 2\Big(\big(\sin(x)\big)'\cos(x) + \sin(x)\big(\cos(x)\big)'\Big)$$

$$= 2\Big(\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\big(-\sin(x)\big)\Big)$$

$$= 2\big(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\big)$$

Um die Ergebnisse vergleichen zu können, wenden wir nochmal das Additionstheorem an:

Ergebnis bei 1.

$$= 2\cos(2x)$$

$$= 2\cos(x+x)$$

$$= 2\left(\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)\right)$$

$$= 2\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right)$$

= Ergebnis bei 2.

Das paßt also.

Bsp zu Ableitungsregeln.

Sei $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$:
$$x \longmapsto \sqrt{\sin(x)}$$

Wir sollen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ bestimmen.

$$f(x) = \sqrt{\sin(x)} = \sin(x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) \overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \frac{1}{2} \sin(x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(\sin(x)\right)'$$

$$= \frac{1}{2} \sin(x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$$

$$f''(x) \overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \frac{1}{2} \left(\left(\sin(x)^{-\frac{1}{2}} \right)' \cdot \cos(x) + \sin(x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos(x)\right)' \right)$$

$$\underset{\text{regel}}{\overset{\text{Ketten-}}{=}} \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\sin(x)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\sin(x)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(x)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cos(x)^2 - \frac{1}{2}\sin(x)^{\frac{1}{2}}$$

(Man hätte die Ableitung von

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sin(x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$$

auch mit der Quotientenregel berechnen können.)

$$f'''(x) \overset{\substack{\text{Produkt-}\\\text{regel}\\\text{\& obige}\\\text{Rechnung}\\\text{für } f'(x)}}{=} -\frac{1}{4}\left(\left(\sin(x)^{-\frac{3}{2}}\right)'\cdot\cos(x)^2 + \sin(x)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\cos(x)^2\right)'\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos(x)$$

$$\overset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\sin(x)^{-\frac{5}{2}}\cdot\cos(x)\cdot\cos(x)^2 + \sin(x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\cos(x)\cdot(-\sin(x))\right) - \frac{1}{4}\sin(x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos(x)$$

$$= \frac{3}{8}\sin(x)^{-\frac{5}{2}}\cos(x)^3 + \frac{1}{4}\sin(x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos(x)$$